Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet – erilaisia ratkaisutapoja tarkastelemalla kohti joustavaa matematiikan osaamista

Riikka Palkki

Matemaattisten tieteiden tutkimusyksikkö, Luonnontieteellinen tiedekunta, Oulun yliopisto

Väitöskirja: http://urn.fi/urn:isbn:9789526233383

Julkisesti tarkastettu: 17. kesäkuuta 2022

Yhteydenotot: riikka.palkki@utu.fi

Arvoisa kustos, arvoisa vastaväittäjä, arvoisat kuulijat

Tänään tarkastettavassa väitöskirjassani käsittelen matemaattista joustavuutta. Perehdyn siihen vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden kautta. Vertailutehtävät ja tarkoitukselliset virheet ovat opetuskeinoja, joiden ajattelen mahdollistavan joustavuutta painottavan opiskeluilmapiirin. Kerron aluksi näistä kolmesta pääkäsitteestä ja niihin liittyvistä uskomuksista. Sitten esittelen väitöstutkimustani ja sen tuloksia.

Esimerkissä 1 on lasku 1+2+3+4+5+6+7+8+9, jossa tulee siis selvittää yhteenlaskettavien summa. Tämä tehtävä voidaan ratkaista ainakin kahdella eri tavalla.

Ratkaisutavassa 1 lasku lasketaan vasemmalta oikealle, jolloin tulee selvittää kahdeksan välivaihetta. Ratkaisutavassa 2 puolestaan käytetään niin sanottuja kymppipareja eli yhdistetään ensin 1 ja 9, sitten 2 ja 8 ja niin edelleen. Jälkimmäisessä ratkaisutavassa välivaiheita tulee vain viisi.

Esimerkki 1. Kaksi eri ratkaisutapaa samaan tehtävään

Ratkaisutapa 1:	Ratkaisutapa 2: ”kymppiparit”
1+2=3	1+9=10
3+3=6	2+8=10
6+4=10	3+7=10
10+5=15	4+6=10
15+6=21	40+5=45
21+7=28	
28+8=36	
36+9=45	

Matemaattiseksi joustavuudeksi kutsutaan kykyä tuottaa erilaisia ratkaisutapoja ja valita niistä tilanteeseen sopivin (esim. Star & Rittle-Johnson, 2008). Kyse on siis erilaisten ratkaisutapojen käyttämisestä yhteen tehtävään ja tapojen vertailusta. Joustavuus on tarpeen mentäessä syvemmälle matematiikan opinnoissa. Ongelmanratkaisussa tarvitaan juuri erilaisten keinojen pohdintaa.

Vertailutehtäväksi kutsun esimerkkiä, jossa on kahden kuvitteellisen oppilaan ratkaisutavat ja kysymyksiä niistä. Luokassa oppilaat tutkivat näitä tapoja vertaillen. Näistä on käytetty myös nimitystä CDMS (Compare and Discuss Multiple Strategies).

Esimerkin 2 vertailutehtävässä kuvitteelliset oppilaat Kalle ja Leena ovat ratkaisseet kumpikin saman yhtälön omilla tavoillaan. Tehtävä on kehittämästämme Joustava yhtälönratkaisu -materiaalista, johon mallina on osin ollut yhdysvaltalainen Contrasting Cases -materiaali (Star ym., 2015). Oppilaat luokassa pohtivat, miten Kalle ratkaisi tehtävän ja miten Leena. Sitten he pohtivat yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia tehtävien välillä ja sitä, miten ratkaisisivat tehtävän itse – käyttäisivätkö he Kallen vai Leenan ratkaisutapaa vai vielä jotain muuta. Joustavuutta on myös miettiä sopivampaa ratkaisutapaa uusiksi, jos tehtävänanto muuttuukin, kuten vertailutehtävän kohdassa d.

Esimerkki 2. Vertailutehtävä (julkaistu JYR-materiaalissa)

Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $\mathbf{3(x+2) = 15}$ seuraavilla tavoilla:

Ensin kerroin vasemman puolen sulkeet auki.

Seuraavaksi vähensin luvun 6 molemmilta puolilta

Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 3

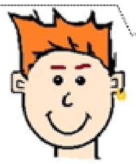
Sain vastaukseksi $x = 3$

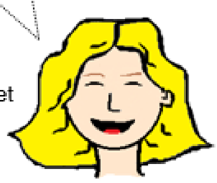
Kallen ratkaisu	**Leenan** ratkaisu
$3(x+2) = 15$	$3(x+2) = 15$
$3x + 6 = 15$	$\frac{3(x+2)}{3} = \frac{15}{3}$
$3x + 6 - 6 = 15 - 6$	$x + 2 = 5$
$3x = 9$	$x + 2 - 2 = 5 - 2$
$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$	$x = 3$
$x = 3$	

Ensin jaoin yhtälön puolittain luvulla 3

Seuraavaksi vähensin luvun 2 molemmilta puolilta

Vastaukseni on $x = 3$





a) Kuinka Kalle ratkaisi yhtälön? Entä Leena? Ovatko he päätyneet oikeaan ratkaisuun? Mistä tiedät tämän?
b) Huomaatko yhtäläisyyksiä Kallen ja Leenan ratkaisuissa?
c) Kumpaa tapaa itse käyttäisit kyseisen yhtälön ratkaisuun?
d) Jos yhtälö olisi muotoa $3(x+2) = 17$, kumpi ratkaisutavoista olisi parempi, miksi?

Lähde: https://aoe.fi/#/materiaali/2392

Vertailutehtäviä yhtälönratkaisussa on tutkittu paljon etenkin Yhdysvalloissa. Ne kehittävät yhdysvaltalaistutkimusten mukaan matemaattista joustavuutta ja muita matematiikan taitoja (esim. Durkin, Rittle-Johnson, Star ym., 2021; Star & Rittle-Johnson, 2008; Star, Pollack ym., 2015). Vertailutehtävien aktiivinen käyttö tuotti parempia oppimistuloksia kuin niiden käyttäminen harvoin. Opettajien esittämät avoimet kysymykset, esimerkiksi ”Haluaako joku kommentoida tätä ideaa?”, ovat niin ikään olleet yhteydessä oppilaiden parempiin joustavuustuloksiin (Star, Newton ym., 2015). Vertailutehtävistä ovat kokeneet hyötyneensä myös oppilaat, jotka ovat pärjänneet heikosti matematiikassa.

Tarkoitukselliseksi virheeksi kutsun tehtävän välivaiheeseen upotettua virhettä. Oppilaat paikantavat virheen ja selittävät auki periaatteen, jolla virheen voisi jatkossa välttää. Näitä tehtäviä on tutkittu myös esimerkiksi nimellä erroneous examples, virheelliset esimerkit, ja saatu hyviä oppimistuloksia (esim. Adams ym., 2014).

Esimerkissä 3 oppilas on aloittanut tehtävän kahdella eri tavalla. Oppilaat pohtivat, mitä huomaavat ja miten kuvitteellista oppilasta voisi neuvoa. Tavassa a) oppilas on tehnyt virheen. Oppilaat voisivat selittää auki, että aluksi tulee laskea kertolaskut. Virheellisen ratkaisutavan voi vaikkapa rastia lopuksi yli.

Esimerkki 3. Tarkoituksellisen virheen sisältävä tehtävä

Vertaa erään oppilaan kahta ratkaisun aloitusta samaan tehtävään. Mitä huomaat?

Tapa a) $2 + 3 \cdot 5 = 5 \cdot 5$ Tapa b) $2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15$

Miten neuvoisit oppilasta?

Tarkoituksellisen virheen käytössä on tärkeää muun muassa korjata virheen taustalla oleva periaate oikeaksi ja esittää rinnakkain oikea ja virheellinen ratkaisutapa (Alfieri ym., 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012).

Joustavuudella tarkoitan siis kykyä tuottaa eri ratkaisutapoja ja sopivimman valintaa. Joustavuutta voidaan kehittää käyttäen vertailutehtäviä, joissa tutkitaan kahta esimerkkiratkaisua. Joskus vertailutehtävään voi olla upotettuna tyypillinen, tarkoituksellinen virhe. Vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä tutkin erityisesti opettajien käsityksiä ja uskomuksia. Seuraavaksi kerron uskomuksista.

Matematiikan opiskeluun liittyy uskomuksia, jotka voivat estää joustavan ilmapiirin toteutumista. Oppilaat voivat esimerkiksi ajatella, että kaikki muut ymmärtävät, mutta itse ei. Oppilaat voivat luulla omaa kysymystään tyhmäksi tai olevansa ainoa, joka ei ymmärrä. Oppilaat voivat ajatella, että matematiikassa tulee ratkaista tehtäviä mahdollisimman nopeasti (Törner, 1998). Virheet nähdään helposti negatiivisina, oppimista häiritsevinä tekijöinä (Steuer & Dresel, 2015).

Niin ikään opetukseen liittyy uskomuksia. Matematiikassa esimerkiksi toistetaan mielellään opettajan esittämää ratkaisutapaa (Schoenfeld, 1992). Minäkin ajattelin opettajana toimiessani, että: ”Tämän voisi tehdä eri tavoinkin, mutten sekoita oppilaita enempää.” Opettajat ja oppilaat myös helposti pelkäävät tai välttelevät virheiden tekemistä tai esittämistä, sillä ne nähdään oppimista häiritsevinä tekijöinä (vrt. Bray, 2011; Metcalfe, 2017). ”Pyyhitäänpä tämä virhe äkkiä pois”, saatoin sanoa itsekin.

Väitöskirjassani tutkin:

1. Testattujen suomalaisoppilaiden joustavuutta yhtälönratkaisussa, joustavuuden suhdetta nopeuteen ja yhtälöiden oikein tekemiseen sekä käsityksiä joustavuudesta;
2. Opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä ja uskomuksia vertailutehtävistä ja tarkoituksellisista virheistä;
3. Vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden käyttöä edistäviä tai vaikeuttavia tekijöitä.

Seuraavaksi kerron tutkimusaineistosta, menetelmistä, päätuloksista ja omien joustavuuden opetusta koskevien uskomusteni muutoksesta.

Aineistossani oli mukana yhteensä 340 oppilasta ja noin 40 opettajaa tai opettajaopiskelijaa. Osan aineistosta keräsin Joustava yhtälönratkaisu -hankkeen rinnalla. Aineistona olivat yhtälönratkaisutestit, opettajien ja opettajaopiskelijoiden litteroidut keskustelut, opettajien kyselyvastaukset ja oppituntien videoinnit. Tutkimusmenetelmäni olivat määrällisiä: regressioanalyysi ja ristiintaulukointi ja laadullisia: fenomenografia, sisällönanalyysi ja tapaustutkimus.

Tutkimukseni koostui neljästä osajulkaisusta ja niiden yhteenvedosta. Väitöstutkimukseni mukaan tutkittujen suomalaisoppilaiden joustavuus oli melko vaatimatonta. Opettajien käsitysten ja uskomusten mukaan vertailutehtävillä ja tarkoituksellisilla virheillä tuetaan oppilaiden aktiivisuutta, analysointitaitoja ja virheistä oppimista. Opettajien käsitysten mukaan tehtävät voisivat muun muassa auttaa ”pitämään oppilaita hereillä” ja ”keskustelemaan, mistä virhe tulee” ja laittaisivat ajattelemaan välivaiheita. Opettajan rooli voisi olla toimia valmentajana. Opettajilla oli myös huolenaiheita, jotka kannattaa huomioida esimerkiksi koulutuksissa. Jotkut opettajat olivat esimerkiksi huolissaan oppilailta tarvittavista esitiedoista, kiinnostuksesta ja siitä, sekoittaisivatko tehtävät oppilaita. Uskomukseni ja käsitykseni matematiikan opettamisesta ovat muuttuneet tämän tutkimuksen myötä. Nyt ajattelen, että vertailutehtäviä ja tarkoituksellisia virheitä kannattaa hyödyntää. Opettajan on hyvä kysellä ja vaatia perusteluja. Vertailutehtävien ideaa voi todennäköisesti soveltaa eri matematiikan osa-alueille ja eri luokka-asteille. Tehtävätyypit vaikuttavat olevan leviämässä Suomeenkin, esimerkiksi ylioppilaskirjoituksiin. Vertailutehtävien ja tarkoituksellisten virheiden avulla matematiikan opiskelusta voi tehdä aktiivisempaa, analyyttisempaa ja keskustelevampaa sekä virheitä hyväksyvämpää.

Pyydän Teitä, arvoisa professori Minna Hannula-Sormunen Oulun yliopiston tutkijakoulun määräämänä vastaväittäjänä esittämään ne muistutukset, joihin katsotte väitöskirjani antavan aihetta.

Lähteet

Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S. & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. *Computers in Human Behavior*, *36*, 401–411. https://doi.org/10.1016/j.chb.2014.03.053

Alfieri, L., Nokes-Malach, T. J. & Schunn, C. D. (2013). Learning through case comparisons: A meta-analytic review. *Educational Psychologist*, *48*(2), 87–113. https://doi.org/10.1080/00461520.2013.775712

Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics education*, *42*(1), 2–38. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.1.0002

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, *22*(3), 206–214. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.11.001

Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Loehr, A. (2021). Comparing and discussing multiple strategies: An approach to improving algebra instruction. The Journal of Experimental Education, 1–19. https://doi.org/10.1080/00220973.2021.1903377

Metcalfe, J. (2017). Learning from errors. *Annual Review of Psychology*, *68*, 465–489.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws (toim.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334–370). New York: MacMillan.

Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B. & Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, *41*, 198–208.

Star, J. R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K. et al. (2015). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, *40*, 41–54. https://doi:10.1016/j.cedpsych.2014.05.005

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*, 565–579. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018

Steuer, G. & Dresel, M. (2015). A constructive error climate as an element of effective learning environments. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *57*(2), 262–275.

Törner, G. (1998). Mathematical Beliefs and Their Impact on Teaching and Learning of Mathematics. Teoksessa E. Pehkonen & G. Törner (toim.) *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research – Results of the MAVI activities* (ss. 73–97). Helsingin yliopisto: Opettajankoulutuslaitos.