Matematiikan ja musiikin yhdistäminen opetuksessa

Anssi Korhonen

Itä-Suomen yliopiston LUMA-keskus, Luonnontieteiden ja metsätieteiden tiedekunta, Itä-Suomen yliopisto

Tiivistelmä: Matematiikka ja musiikki kulkevat käsi kädessä. Musiikista löytyvät murtoluvut ja niiden laskutoimitukset, jaollisuus, lukujonot sekä jopa logaritmit ja eksponentit. Tällöin myös opetuksessa matematiikan ja musiikin yhdistäminen on mahdollista ja antaa uutta näkökulmaa sekä konkretiaa perinteisen laskupainotteisen oppitunnin rinnalle. Artikkelissa laajennetaan LUMATIKKA3: matematiikka ja taide -kurssilla esiteltyjä matematiikan ja musiikin yhtäläisyyksiä muun muassa aivotoimintaan sekä tarkemmin eri menetelmiin matematiikan ja musiikin yhdistämisestä niin alakoulun, yläkoulun kuin myös lukion opetuksessa.

Avainsanat: murtoluvut, aika-arvot, tahtilajit, intervallit, ääniaallot, logaritmit, eksponentit, matematiikan opetus, monialainen opetus, eheyttävä opetus

Yhteystiedot: anssi.korhonen@uef.fi

1 Johdanto

Miten matematiikka ja musiikki liittyvät toisiinsa? Usein matematiikka mielletään formaalina tieteenä, kun taas musiikki on yksi ilmaisevista taiteenmuodoista. Nämä kaksi ovat kuitenkin vahvasti linkittyneet toisiinsa molempien tieteenalojen historian ajan. Jo Pythagoras havaitsi, kuinka värähtelevän kielen pituus on kääntäen verrannollinen sen tuottamaan äänen korkeuteen, eli mikäli kielen pituus puolitetaan, niin sävelkorkeus nousee oktaavilla (Apiola, 2015). Myös kuuluisa muusikko J.S. Bach tutki matemaattista ongelmaa löytää käytännöllinen tapa virittää kosketinsoittimia (Wright, 2009, s. 5). Matematiikan avulla kuvataan monia musiikin ilmiöitä, kuten kielten värähtelyä tietyillä aallonpituuksilla (Shah, 2010, s. 7). Lisäksi tarkemmin ajateltuna, nuottien aika-arvot vastaavat murtolukuja ja tahtilajien kautta suoritetaan murtolukujen yhteenlaskuja (Marjanen, 2013, s. 28). Nuottiviivasto, johon nuotit ja tahtilajit sijoitetaan, on puolestaan omanlaisensa koordinaatisto (Shah, 2010, s. 17).

Voidaan puhua myös matematiikan ja musiikin yhtäläisyyksistä aivotoiminnassa, ja siitä, kuinka musiikin harjoittaminen vahvistaa matemaattista osaamista. Neurologisesti tarkisteltuna näillä kahdella on yhteys, sillä musiikin käsittely tapahtuu lähekkäisillä tai samoilla aivon alueilla kuin tiettyjen matemaattisten ongelmien tehtävien suorittaminen. Tätä väitettä on myös kritisoitu, sillä musiikin ei ole nähty vaikuttavan kaikkiin matematiikan osa-alueisiin tai älykkyyteen yleisesti. Musiikin kuuntelun on kuitenkin todettu vahvistavan niitä hermoratoja, joita ihminen käyttää esimerkiksi ongelmanratkaisuun tai avaruudelliseen hahmottamiseen. Tällöin aktiivisen musiikin kuuntelun vahvistaessa näitä hermoratoja, johtaa se myös parempiin taitoihin muun muassa avaruudellista hahmottamista vaativissa ongelmanratkaisussa. (Kaperi, 2020, s. 19–21.)

Musiikin kuuntelu jo raskauden aikana on todettu aiheuttavan sikiön aivoissa positiivisia muutoksia. Esimerkiksi, kun äidit kuuntelevat raskauden aikana musiikkia, on heidän lastensa huomattu syntymän jälkeen reagoivan puheeseen enemmän, kuin sellaisten lasten, joiden äiti ei ollut kuunnellut raskaana ollessaan musiikkia. Yleisestikin musiikillisen aktiivisuuden on havaittu hyödyttävän lasten aivotoimintaa. Se auttaa lapsen kuulokyvyn kehittymistä, kuten kuullun muistamista ja äänien ominaisuuksien erottelua, sekä kielellistä kehittymistä esimerkiksi sanavaraston kasvattamisen kannalta. Lisäksi jo vastasyntyneellä lapsella on kyky musiikin käsittelyyn ja sointujen erotteluun. Tämän pohjalta on perusteltua sanoa, että jo varhaiskasvatuksessa musiikin integrointi esimerkiksi matematiikan opetukseen on lapsen oppimisen kannalta hyödyllistä. (Kaperi, 2020, s. 21–22.)

Myös muusikoiden ja ei-muusikoiden aivorakennetta sekä aivojen toimintaa on tutkittu ja havaittu, että muusikoiden aivot ovat rakenteeltaan kehittyneemmät kuin ei-muusikoiden. On myös tutkittu, että muusikoiden aivot prosessoivat tehokkaammin tietoa ja niillä on paremmat edellytykset muistamiselle ja muistista palauttamiselle. (Kaperi, 2020, s. 22.)

Musiikin kuunteleminen ja musiikin luominen, esimerkiksi soittamalla jotain soitinta, kehittää lukuisia kognitiivisia toimintoja aktivoimalla aivoalueita, jotka ovat kognitioiden kannalta tärkeitä. Kognitiivisten taitojen kehittymisen lisäksi musiikin on tutkittu kehittävän myös keskittymiskykyä. Tällöin musiikin sisällyttäminen niin peruskoulun kuin lukionkin tunneille on perusteltua. Kuitenkin musiikin vaikutus suorasti esimerkiksi yleiseen oppimiseen ja akateemisten taitojen kehittämiseen on vielä avoin. (Kaperi, 2020, s. 31.)

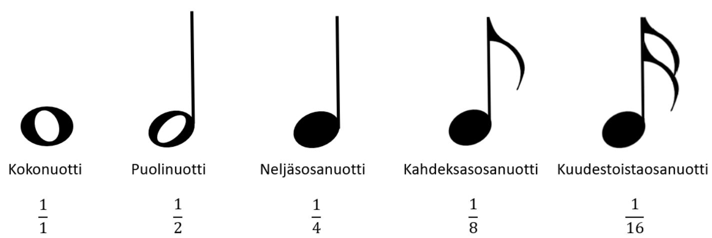
Tässä artikkelissa kuvataan musiikin ja matematiikan yhtäläisyyksiä teorian tasolla sekä annetaan ideoita näiden kahden integroimiseen niin varhaiskasvatuksen, alakoulun, yläkoulun kuin myös lukion opetuksessa. Artikkelin ensimmäisessä luvussa käsitellään yleisimmät nuottien aika-arvot, niiden symbolit sekä yhteydet murtolukuihin. Sisältö on tarkoitettu erityisesti peruskoulutasolle. Sen jälkeen siirrytään tahtilajit ja rytmi -lukuun, joka sisältää teoriaa tahtilajeista ja niiden yhteydestä matematiikkaan laskemisen, murtolukujen sekä muun muassa jaollisuuden muodossa. Kyseisen luvun asiat on suunnattu lähinnä varhaiskasvatukseen sekä peruskouluun.

Neljännessä luvussa siirrytään tutkimaan nuottiviivastoa ja intervalleja. Luku selittää teorian tasolla sävelten taajuuksia ja niiden suhteita eli intervalleja. Lisäksi käydään läpi sitä, miten intervalleja voidaan hyödyntää logaritmeihin ja lukujonoihin sekä yleisimpien intervallien määritelmiä. Tämän luvun asiat sopivat parhaiten lukiotasolle, mutta myös peruskouluasteen opetukseen voi saada inspiraatiota.

Artikkelin toiseksi viimeisessä kappaleessa käsitellään kielen värähtelyä, jossa käydään teorian tasolla taajuuksia ja sitä myöten muun muassa sitä, mihin kielisoittimien toiminta perustuu. Teorian jälkeen on havainnollistavia tehtäviä taajuuksien tutkimiseen. Kappaleen teoriaosuus soveltuu enimmäkseen lukioon, mutta siitä saa myös ideoita peruskoulun opetukseen. Havainnollistavat tehtävät sisältävät vinkkejä myös varhaiskasvatukseen ja peruskoulun pienemmille oppijoille. Viimeisenä kerrotaan lopuksi ääniaalloista sinifunktion muodossa ja sitä kautta käydään läpi sitä, miten trigonometriset funktiot toimivat. Havainnollistava äänitystehtävä tutkimuksineen on myös sovellettavissa peruskouluun, vaikka teoriapuoli painottuukin lukion matematiikkaan. Kokonaisuudessaan artikkeli pohjautuu LUMATIKKA-koulutuksen järjestämän Matematiikka ja taide -kurssin *Matematiikka ja musiikki* -osioon, jonka tämän artikkelin kirjoittaja on koostanut.

2 Nuottien aika-arvot ja murtoluvut

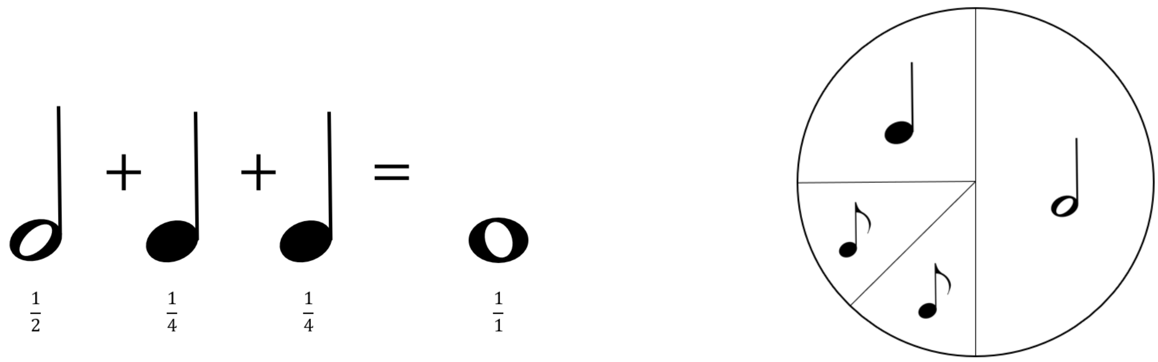
Nuottien sekä murtolukujen opiskelun voi kätevästi integroida keskenään. Mikäli kuitenkin murtoluvut ja niillä laskeminen ovat jo ennestään tuttuja, nuottien käsitteiden opettaminen käy murtolukujen kertaamisena. Yleisimmät käytettävissä olevat nuotit ovat *kokonuotti*, *puolinuotti*, *neljäsosanuotti* sekä *kahdeksasosanuotti*. Kahdeksasosanuotin jälkeen, kun nuotin *aika-arvo* puolitetaan, lisätään nuottiin uusi väkänen edellisen alle. Näiden symbolit löytyvät kuvasta 1. (Wright, 2009, s. 18–19.)



Kuva 1. Yleisimpien nuottien symbolit, nimet sekä niitä vastaavat murtoluvut.

Kun nuotteja lasketaan yhteen, kuten kuvassa 2a on tehty, tapahtuu se samalla tapaa kuin murtolukujen yhteenlasku. Hyvänä havainnollistuskeinona voi käyttää kuvan 2b kaltaista, murtolukujen yhteydestä oppilaille usein tuttua *piirakkamallia*, jossa koko piirakka vastaa kokonuottia, puolikas puolinuottia ja niin edelleen. Piirakkamallia voi käyttää myös eräänlaisena palapelitehtävänä. Muita hyödyllisiä tehtäviä murtolukujen ja nuottien oppimiseen ovat yhdistelytehtävät, joissa tehtävänannossa on kuvattuna nuottien symbolit, niiden nimet ja murtolukumerkinnät, kuten kuvassa 1, mutta sekoitetussa järjestyksessä. Tämän jälkeen oppilaan tehtävänä voi olla yhdistää symboli oikeaan nimeen ja murtolukumerkintään. Nuottisymbolien avulla on mahdollista rakentaa ja havainnollistaa helposti erilaisia laskuja, joiden avulla nuotit tulevat tutuksi ja laskutaidot murtoluvuilla syvenevät. (Marjanen, 2013, s. 24–28.)

2a 2b



Kuva 2. Esimerkkilasku nuottien avulla sekä piirakkamalli nuottien aika-arvoista suhteellisina osuuksina

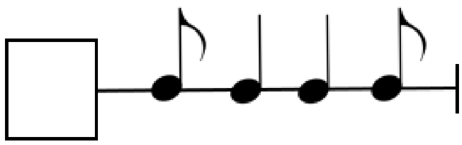
3 Tahtilajit ja rytmi

Kun nuotteja sijoitetaan *nuottiviivastolle*, määrää *tahtilaji* sen, kuinka paljon ja millaisia nuotteja yhteen tahtiin mahtuu. Tahtilajin kertoo *tahtiosoitus*, joka löytyy merkittynä kappaleen alussa, kuten kuvassa 3. Yleisimmät tahtilajit ovat $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ ja $\frac{6}{8}$. Tahtilajimerkinnässä osoittaja kertoo sen, kuinka monta nuottia tahtiin mahtuu ja nimittäjä sen, millaisia nämä nuotit ovat. Esimerkiksi tahtilajissa $\frac{2}{4}$ yhteen tahtiin mahtuu kaksi neljäsosanuottia. Tahdin voi myös täyttää muilla nuoteilla, kunhan tahdin mitta ei muutu. (Shah, 2010, s. 22–23.)

Tahtilajien ymmärtämisen havainnollistamiseen voidaan käyttää esimerkiksi kartonkipaloja, jotka ovat leikattu leveydeltään nuotin aika-arvoa vastaavaksi; kokonuotti on leveydeltään suurin, puolinuotti leveydeltään puolet kokonuotin palasta ja niin edelleen. Tämän jälkeen taululle voidaan piirtää nuottiviivasto esimerkiksi tahtilajilla $\frac{2}{4}$ ja mitoitettuna niin, että siihen mahtuu yksi puolinuottia vastaava kartonkipala. Tällöin kokonuotti ei mahdu tähän tahtilajiin, mutta esimerkiksi neljä kahdeksasosanuottia täyttää tahtilajin täydellisesti.

Kuva 3. Tahtilaji $\frac{3}{4}$ ja sen mukaisesti kaksi esimerkkitahtia.

Oppilaiden kanssa tahtilajin ja tahdin ymmärtämiseen voi käyttää myös erilaisia laskuvariaatioita. Oppilaat voivat selvittää tahtilajeja esimerkiksi siten, että tahti on täytetty erilaisilla nuoteilla valmiiksi ja heidän tulee laskea nuottien aika-arvot yhteen (Işıtan & Doğan, 2020, s. 103–104). Konkreettisena apukeinona ratkaisemiseen voi käyttää esimerkiksi yllä mainittua nuottien havainnointimenetelmää kartonkipaloilla. Tästä yksi esimerkki löytyy kuvasta 4.



Kuva 4. Esimerkki tehtävästä, jossa ratkaistaan tahtilaji.

Tahtilajeja opettaessa voidaan ottaa avuksi mukaan *rytmi*, vaikka yksinkertaisesti taputtaen. Rytmi itsessään koostuu peräkkäisistä nuoteista ja tauoista, jotka tahtilaji jakaa saman mittaisiin tahteihin (Tamminen, 2015). Erityisesti pienempien oppijoiden kanssa musiikin rytmin hahmottamisessa on tärkeää kehon mukaan ottaminen ja tahdin mukaan liikkuminen vaikka tanssien tai muun musiikkiliikunnan kautta (Musiikkimatka.fi, 2022).

Yksinkertaisin tapa lähteä tekemään rytmiharjoituksia on käyttää alkuun vain neljäsosa- ja kahdeksasosanuottia. Näistä perussykkeenä toimii neljäsosanuotti, joka luetaan ”TAA”. Kahdeksasosanuotti luetaan puolestaan ”TI”. (Niemelä, 2015, s. 39.) Tällöin tahti, joka sisältää alkuun kaksi neljäsosanuottia, sitten kaksi kahdeksasosanuottia ja lopuksi vielä yhden neljäsosanuotin, luetaan ”TAA-TAA-TI-TI-TAA”.

Rytmejä harjoitellessa voi luokan ja ryhmän kanssa sopia, että esimerkiksi neljäsosanuotti taputetaan käsin, kahdeksasosanuotti rintakehään ja puolinuotti reisille.

Näin laskemiseen saadaan keho mukaan monipuolisemmin. (Fagerlund, 2020, s. 25.) Lisäksi ääneen laskeminen tehostaa rytmin sisäistämistä ja pienemmille luvut tulevat samalla tutummaksi. Käyttämällä eri tahtilajeja saadaan variaatioita laskemiseen ja aiheen ymmärrystä syvennettyä.

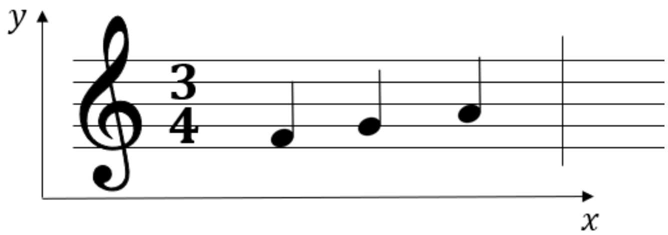
Rytmiä, tahtilajeja ja rytmitajua voi harjoitella myös *kaikuharjoituksena*. Tässä opettaja taputtaa ensin yksin jonkun rytmin, johon oppilaat vastaavat kaikuna. Kun rytmit sujuvat opettajajohtoisesti, voivat oppilaat tehdä kaikuharjoituksen pareittain. Toinen parista luo rytmin, johon pari kaikuna vastaa. Näin oppilaat pääsevät itse käyttämään luovuuttaan. (Musiikkimatka.fi, 2022.) Lisäksi omien sävellysten ja rytmien tekeminen kehittää tutkitusti lapsen ongelmanratkaisukykyä, kuten johdannossa todettiin. Myöhemmin, kun taputtaminen sujuu hyvin, voidaan rytmiin yhdistää laulun lyriikoita ja loruja, joiden avulla tuetaan myös verbaalista kehitystä ja tavuttamisen hahmottamista (Rajala, 2016). Kehon lisäksi voidaan käyttää itsetehtyjä rytmisoittimia, kuten kapuloita ja rytmimunia, jotta oppimiseen saadaan vielä enemmän mielekkyyttä. (Musiikkimatka.fi, 2022).

Sarjojen, pienimmän yhteisen tekijän ja jaollisuuden alkeiden opettamiseenkin voi hyvin käyttää rytmiä ja sitä myöten kehoa. Tähän teemaan liittyvässä harjoituksessa luokka jaetaan kahteen ryhmään. Ryhmän A oppilaat taputtavat tahtilajiin $\frac{3}{4}$ siten, että ensimmäinen tahti taputetaan reisiin, toinen rintakehään ja kolmas kädet vastakkain. Toinen ryhmä B taputtaa tahtilajiin $\frac{2}{4}$ niin, että ensimmäinen taputetaan reisiin ja toinen kädet vastakkain. Ryhmät jatkavat omien tahtiensa taputtamista jonkin aikaa samassa rytmissä. Tällöin huomataan, että kädet vastakkain taputukset kohtaavat ryhmän B kolmannen tahdin jälkeen ja ryhmän A toisen tahdin jälkeen. Tästä saadaan pääteltyä, että lukujen kaksi ja kolme *pienin yhteinen tekijä* on kuusi. Ryhmän kanssa voidaan yhdessä miettiä, miksi näin tapahtuu ja mitä yhteistä luvulla kaksi ja kolme tällöin on. Tehtävää voi myös tehdä pareittain tai pienryhmissä erityisesti silloin, jos opetettava ryhmä on suuri. (Summamutikka, 2022.)

4 Nuottiviivasto ja intervallit

4.1 Nuottiviivasto

Nuottiviivaston avulla saadaan musiikkiin liitettyä *melodia* rytmin lisäksi. Se voidaan käsittää *koordinaatistona*, jossa x-akseli kuvaa ajan kulkua ja y-akseli *sävelkorkeutta*, kuten kuvassa 5 on esitetty (Shah, 2010, s. 17). Nuottiviivasto käsittää viisi viivaa, jotka ovat tasaisin välimatkoin toisistaan, sekä *G-nuottiavaimen*, joka osoittaa koukerollaan G-sävelen paikan. Lisäksi nuottiviivastolle merkitään jo aiemmin opittu tahtilaji. Nuotteja voidaan sijoittaa niin viivojen väliin kuin viivojen päälle, kuten kuvassa 6. (Wright, 2009, s. 4–5.)



Kuva 5. Nuottiviivasto, johon on lisätty havainnollistamaan xy-koordinaatisto. X-akseli kuvaa aikaa ja y-akseli sävelkorkeutta. Ennen tahtilajia on nähtävissä G-nuottiavain.

Kuva 6. Sävelet ja niiden sijoittuminen nuottiviivastolle. Numero sävelen perässä kertoo oktaavialan.

Nuottiviivastolla olevan sävelen sävelkorkeuden määrittää sen tuottama *taajuus*. On esimerkiksi sovittu, että nuotin A1 taajuus on 440 Hz, kun sen sijainti on kuvan 7 mukaisesti keski-C:n yläpuolella. (Wright, 2009, s. 4.)

Kuva 7. Taajuudella 440 Hz soivan A-nuotin sijainti nuottiviivastolla.

Sävelten korkeuksien eroa toisistaan kutsutaan *intervalleiksi*, joista yleisin lienee *oktaavi*. Oktaavilla tarkoittaa kaksinkertaista taajuuseroa sävelkorkeuksissa. Taajuuden yksikkö on hertsi (Hz) eli $\frac{1}{sekunti}$. Yllä mainittiin nuotin A1 taajuudeksi 440 Hz, jolloin oktaavia ylempänä olevan A2 nuotin taajuus on $2 \cdot 440\ Hz = 880\ Hz$. Toisaalta oktaavia alempana olevan A:n taajuus on $\frac{1}{2} \cdot 440\ Hz = 220\ Hz$. Tärkeää huomata, että intervallien ero on nimenomaan taajuuksien suhteessa, ei erotuksessa. Kahden taajuuden f_1 ja f_2 suhde r saadaan laskettua kaavalla $r = \frac{f_1}{f_2}$. (Wright, 2009, s. 45–46.)

Yksi oktaavi on jaettu 12 *puolisävelaskeleeseen*. Tämä on havaittavissa selkeimmin pianon koskettimista, kun lasketaan esimerkiksi kahden C:n välissä olevat valkeat ja mustat painikkeet, kuten kuvassa 8.

Kuva 8. Pianon koskettimet, soinnut sekä oktaavi, joka on jaettu 12 puolisävelaskeleeseen. Merkintä # tarkoittaa puolisävelaskeleen korotusta nuottiin.

Tämän tiedon avulla saadaan laskettua muiden sävelten taajuudet. Oletetaan nyt yhden puolisävelen välisen taajuussuhteen olevan r. Lisäksi tiedetään, että oktaavin päässä toisistaan olevan soinnun taajuuksien välinen suhde on 2. Koska oktaavin välissä puolisäveliä on 12, saadaan muodostettua kaava $r^{12} = 2$, jolloin $r = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$. Näin on ratkaistu suhdeluvun yhden puolisävelen välille. Tällöin x määrälle puolisäveliä saadaan suhde $(2^{\frac{1}{12}})^x = 2^{\frac{x}{12}}$. Tätä kutsutaan *tasavireiseksi asteikoksi*. Tasavireistä asteikkoa käytetään muun muassa pianon virittämiseen. (Wright, 2009, s. 47.)

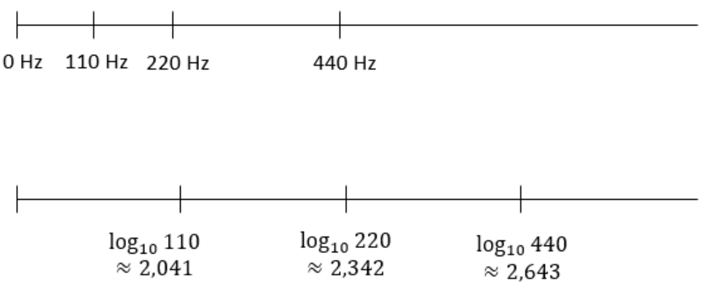
Voidaan laskea esimerkiksi neljän puolisävelen välin suhde, joka on $2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} = 1{,}25992$. Esimerkiksi nuotin A1 taajuuden ollessa 440 Hz, on neljän puolisävelen päässä korkeammalla olevan nuotin C#2 taajuus $440\ Hz \cdot 1{,}25992 = 554{,}365\ Hz$. Alempien taajuuksien laskemiseen pätee sama kaava. Mikäli lasketaan neljän puolisävelen päässä matalammalla olevan nuotin taajuutta, vaihdetaan x:n tilalle -4, eli $2^{-\frac{4}{12}} = 2^{-\frac{1}{3}} = 0{,}793701$. Tällöin nuotin F1 taajuus on $440\ Hz \cdot 0{,}793701 = 349{,}228\ Hz$.

Tästä asiasta on mahdollista luoda vanhemmille oppijoille soveltavia tehtäviä. Esimerkiksi oppilaille voidaan näyttää nuottiviivastolta jokin sointu ja pyytää heitä laskemaan tämän taajuus, kun tiedetään vaikkapa A1-nuotin taajuuden olevan 440 Hz. Lisäksi yhtälöä voidaan käyttää myös toiseen suuntaan, jolloin tehtävänannossa voidaan antaa valmiiksi jokin taajuus ja oppilaan tulee laskea, mikä nuotti on kyseessä. Myös yhteisenä tutkimuksena voidaan johtaa yllä oleva kaava, jonka avulla saadaan laskettua puolisävelten välisiä taajuuseroja.

4.2 Intervallit logaritmeissa sekä lukujonoissa

Intervalleista saa *logaritmeihin* liittyviä harjoitteita muokkaamalla potenssilaskut käänteiseksi. Lisäksi logaritmien oppimisen ymmärtämiseen voidaan käyttää sävelten taajuuksien suhteita. Kuten aiemmin mainittiin, sävelpareilla, joilla on sama intervalli, on myös sama taajuuksien välinen suhde. Tällöin esimerkiksi sävelen A oktaavien taajuuksille pätee $\frac{A_2}{A_1} = \frac{A4}{A3}$. Nyt hyödyntämällä logaritmien laskusääntöjä, saadaan $\log_b A_2 - \log_b A_1 = \log_b A_4 - \log_b A_3$, eli logaritmisella skaalalla oktaavien taajuudet sijoittuvat täsmälleen samalle etäisyydelle toisistaan. Tätä havainnoi kuva 9. (Wright, 2009, s. 55–56.)

Tästä saadaan hyvä yhteys myös lukujonoihin. Nyt intervallien ollessa taajuuksien suhteita, huomataan, että saman intervallin päässä toisistaan olevien taajuuksien muodostavan *geometrisen jonon*. Eli esimerkiksi oktaavit muodostavat geometrisen jonon, jossa jonon jäsenen suhde edelliseen on kaksinkertainen. Kun intervallit muutetaan logaritmiselle skaalalle, saadaan aikaan *aritmeettinen lukujono*, jossa peräkkäisten jonon jäsenten erotus on aina vakio. (Vatanen, 2015, s. 17, 21.)



Kuva 9. Ylemmällä suoralla sävelen A oktaavien taajuudet ja alemmalla suoralla samojen taajuuksien 10-kantaiset logaritmit.

4.3 Yleisimmät intervallit

Kahden eri sävelen välistä korkeuksien eroa siis kutsutaan *intervalliksi*. Ehkä tunnetuimman intervallin, oktaavin, käsite käytiin tarkemmin edellisessä alaluvussa. Sen lisäksi muita tavallisia intervalleja ovat *priimi*, *sekunti*, *terssi*, *kvartti*, *kvintti*, *seksti* ja *septimi*. Näistä intervalleista esimerkit ovat nähtävissä taulukossa 1. Priimiä, kvarttia, kvinttiä ja oktaavia kutsutaan *puhtaiksi intervalleiksi*, kun taas sekunti, terssi, seksti ja septimi ovat *suuria intervalleja*. (Wright, 2009, s. 6.)

Taulukko 1. Intervallit sekä niille esimerkkisävelväli.

Intervalli	Esimerkkisävelväli
Priimi	C1-C1
Sekunti	C1-D1
Terssi	C1-E1
Kvartti	C1-F1
Kvintti	C1-G1
Seksti	C1-A1
Septimi	C1-H1
Oktaavi	C1-C2

Vähennetyt intervallit ovat sävelaskelmiltaan suppeampia kuin puhtaat tai *pienet intervallit*. Eli esimerkiksi *vähennetty kvintti* sisältää kuusi puolisäveltä, kuten välin H-F, kun puhdas kvintti sisältää seitsemän, kuten väli C-G. (Opipistenuotteja.fi.).

Pienet intervallit ovat yhden puolisävelen suppeampia kuin suuret. Tällöin esimerkiksi pieni sekunti on väli E-F, sisältäen yhden puolisävelen, kun taas suuri sekunti on väli G-A, joka sisältää kaksi puolisäveltä. *Ylinousevat intervallit* ovat yhden puolisävelen laajempia kuin puhtaat tai suuret intervallit. Tällöin väli C-G# on esimerkiksi ylinouseva kvintti, eli sisältää kahdeksan puolisäveltä. (Opipistenuotteja.fi.).

Intervallien määritelmien avulla oppilaille voidaan muodostaa haastavampia sanallisia laskutehtäviä, joilla kehitetään myös luetun ymmärtämistä. Esimerkiksi tehtävässä voidaan antaa esitietona H-sävelen taajuus, puhtaan kvintin määritelmä ja tiedustella tältä pohjalta tasavireisesti viritetyn pianon antamaa taajuutta sävelestä, joka on puhtaan kvintin päässä annetusta H-sävelestä.

5 Kielen värähtely

Pythagoras, joka on varmaan useammalle tuttu suorakulmaisten kolmioiden kautta, tutki aikanaan paljon myös kielten värähtelyä sekä näin aikaan saatuja taajuuden muutoksia. Hän huomasi, että soittimen kielen pituuden puolittamalla saadaan nostettua sen sävelkorkeus oktaavilla ylemmäs. Tästä saatiin johdettua teoria, jonka mukaan kielen taajuus on *kääntäen verrannollinen* sen pituuteen, eli $f \propto \frac{1}{l}$. Tällöin taajuuden f ja kielen pituuden l suhde saadaan ilmaistua yhtälöllä $f = \frac{k}{l}$, missä k on jokin positiivinen vakio. Tämä ilmiö huomataan parhaiten kielisoittimissa, kuten viulussa, jossa soittaja painaa kielen otelautaa vasten ja saa näin aikaan eri taajuuksista säveltä muuttamalla kielen pituutta. (Wright, 2009, s. 50.)

Tästä johtamalla voidaan muodostaa kaava, jonka avulla saadaan laskettua kohta, josta kieltä tulee painaa, jotta saadaan muodostettua esimerkiksi suuri terssi. Tällöin, jos kielen pituus on l, niin muuttamalla kielen pituutta saadaan uudeksi pituudeksi ql, missä q on jokin positiivinen kerroin. Näin ollen laskemalla taajuuksien suhteet, saadaan $r = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{k}{ql}}{\frac{k}{l}} = \frac{l}{ql} = \frac{1}{q}$, jolloin $q = \frac{1}{r} = r^{-1}$. (Wright, 2009, ss. 50–51.)

Hyödyntämällä aiempia tuloksia, tiedetään, että suuren terssin taajuuden suhde $r = 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}$, jolloin $q = (2^{\frac{1}{3}})^{-1} \approx 0{,}8$. Tällöin halutessamme soittaa suuren terssin täytyy sormi asettaa otelaudalle niin, että alkuperäisestä kielen pituudesta soi $\frac{4}{5}$.

Tätä on helppo havainnoida oppilaiden kanssa, jolloin opetukseen ja laskuihin saadaan konkreettisuutta. Havainnointi voidaan suorittaa mittaamalla esimerkiksi kitaran E-kielen pituus, jonka jälkeen lasketaan haluttu uusi pituus. Kuvassa 10 nähdään, että kitaran paksun E-kielen pituus on 66 cm. Jos halutaan löytää suuri terssi suhteessa vapaasti soivaan E-kieleen, tehdään laskutoimitus $66\text{ cm} \cdot \frac{4}{5} = 52{,}8\text{ cm}$. Kuvasta 10 huomataan, että 52,8 cm kohdalla on neljäs *otenauha*. Siis painamalla sormella neljättä väliä soi kitaran E-kielestä 52,8 cm pituinen osa ja saadaan G#-sävel. Oppilaiden kanssa voidaan soittaa vielä vapaata E-kieltä ja uuden pituuden tuottamaa taajuutta, eli G#-säveltä. Verrokkina voi tuottaa vastaavat sävelet vaikkapa pianolla.

Kuva 10. Kitaran kaula ja kielien pituudet.

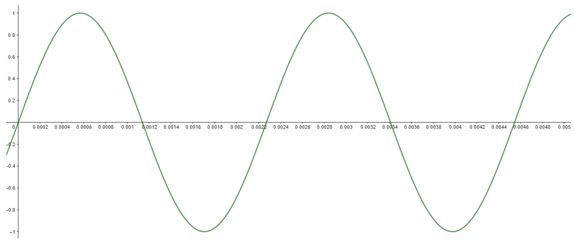
Pienempien oppijoiden kanssa taajuuksia ja sävelkorkeuksien suhteita voi tutkia tekemällä yhdessä omat soittimet vedellä täytettyjen juomalasien tai pullojen avulla. (ks. Ellington NHS, 2020). Kaatamalla eri määriä vettä samanlaisiin laseihin, ja napauttamalla niitä lusikalla, saadaan aikaan eri taajuuksia. Tässä tapauksessa mitä enemmän vettä laseissa on, sitä matalampi taajuus saadaan aikaan, sillä tällöin lasi värähtelee hitaammin. Laseihin voi halutessaan lisätä väriainetta, jolloin se voi auttaa joitain oppilaita hahmottamaan vesimäärät vielä paremmin. Lisäksi laseja voi kokeilla napauttaa eri materiaalista tehdyillä esineillä, kuten metallilusikalla, muovilusikalla ja puisella kapulalla. Oppilaat voivat näin mukavalla tavalla tehdä omaa musiikkia, ja samalla oppia taajuuksien alkeita sekä mittaamista ja määriä. (How to Make Science Projects for Kids, 2013.)

Toinen vastaava tapa tehdä musiikkia helposti, sekä tutkia samalla äänentaajuuksien eroja, on käyttää pulloja tai koeputkia ja puhaltaa niihin (Oppimateriaalikeskus OPIKE, 2012, s. 16). Tällöin sävel syntyy pulloon muodostuvan ilmapatsaan kautta. Tyhjä pullo synnyttää matalan äänen, kun taas vettä lisäämällä äänen taajuutta saadaan nostettua (Science World, 2022). Oppilaille voi antaa tehtäväksi tehdä ryhmissä pullosoittimet siten, että pulloihin lisätään tasaisin suhtein vettä. Esimerkiksi viiteen pulloon niin, että nesteiden suhteelliset määrät ovat $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{5}{5}$. Näin soitinten tekoon saadaan mukaan mittaamista sekä laskemista.

Pulloon puhaltamisen ohella vastaavaan ilmiöön perustuu myös viivaimen rämpyttely pöytää vasten; mitä pidempi osa viivaimesta on rämpytettävänä, ja siten mitä lyhyempi osa pöytää vasten, sitä matalampi on muodostuva taajuus (Oppimateriaalikeskus OPIKE, 2012, s. 13). Vanhemmille tai musikaalisesti taitaville oppijoille harjoitteita voidaan eriyttää ylöspäin pyytämällä heitä itsenäisesti tai pienryhmissä rakentamaan jokin tuttu melodia, kuten ”Tuiki, tuiki tähtönen” tai muu vastaava.

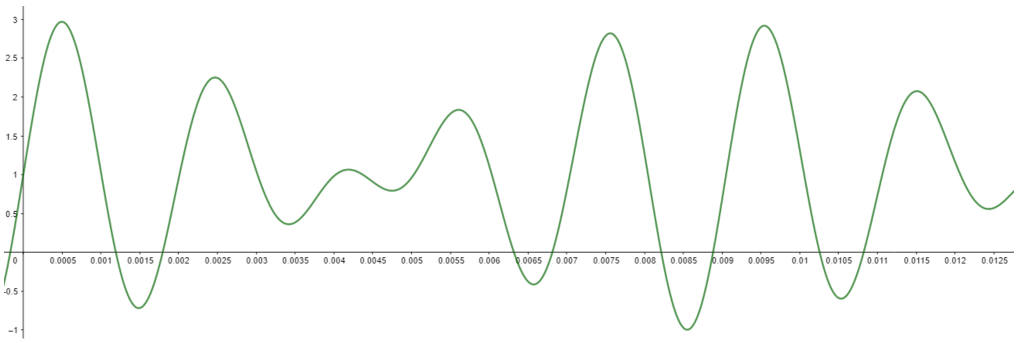
6 Ääniaalloista

Sävel, ja ääni yleensä, on ilmassa etenevää *aaltoliikettä* (Apiola, 2015). Tyypillisin funktio, joka kuvaa ääniaaltoa, on $y = A\sin(2\pi(ft + \phi))$. Funktiossa A on aallon *amplitudi*, joka vastaa äänen kovuutta, f on taajuus, joka kuvaa äänen korkeutta, ϕ kuvaa aallon vaihetta ajassa $t = 0$ ja t kuvastaa aikaa. (Naiman.) Esimerkiksi 440 Hz taajuudella värähtelevä sävel A saadaan ilmaistua funktiolla $y = \sin(2\pi \cdot 440t)$, josta kuvaaja on esitetty kuvassa 11. Mikäli taajuutta korotettaisiin, niin tällöin jakson aika pienenee ja aaltoliike tihenee. (Rogness, 2022.)

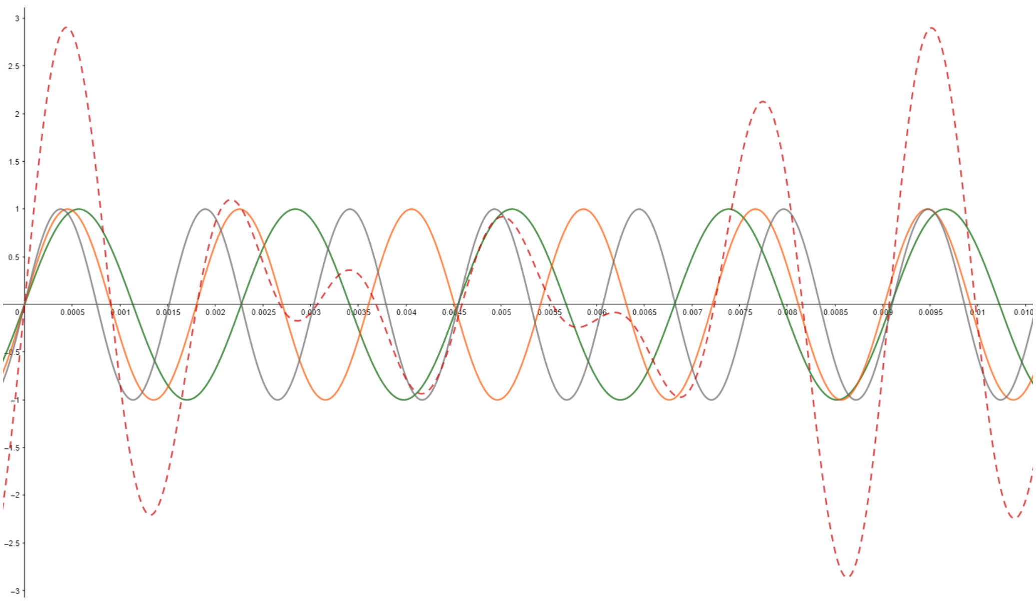


Kuva 11. Sävelen A (440 Hz) aaltoliikettä.

Kun säveliä soitetaan yhtä aikaa, summataan sävelten funktiot yhteen. Tällöin esimerkiksi sävelten A, C# ja E muodostaman A-duurisoinnun aaltofunktio yhdistettynä olisi $y = \sin(2\pi \cdot 440t) + \sin(2\pi \cdot 554{,}36t) + \sin(2\pi \cdot 659{,}25t)$. Tästä löytyy kuvaaja kuvasta 12. Yhdistetyn kuvaajan aaltoliike on selvästi monimutkaisempi, mutta silti siinä on nähtävissä tietty kaavamaisuus. Kuvassa 13 nähdään kaikki kolme aaltoa erikseen ja lisäksi niiden summa katkoviivalla. (Rogness, 2022.)



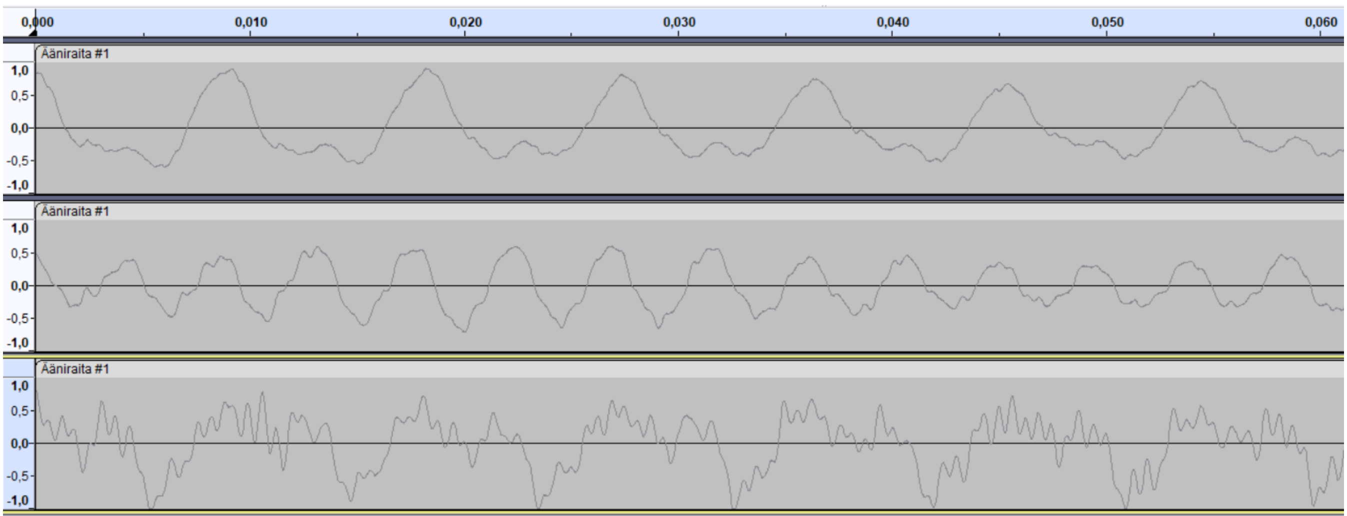
Kuva 12. Sävelet A, C# ja E eli A-duuri yhdistettynä summatuksi aaltofunktioksi.



Kuva 13. Sävelten A, C# ja E tuottamat aaltofunktiot sekä näiden summafunktio katkoviivalla. Kuva havainnollistaa aaltojen konkreettisen summautumisen.

Ääniaaltoja voidaan tutkia oppilaiden kanssa äänittämällä erilaisista soittimista ja tavaroista lähteviä ääniä. Tähän voi käyttää esimerkkinä aiemmin mainittuja vesilaseja, pulloja ja viivaimia sekä koululta löytyviä soittimia. Lisäksi oppijoiden kanssa voi äänittää heidän omaa puhe- tai lauluääntään. Äänittäessä kannattaa soittimia soittaa eri voimakkuudella ja eri korkeuksilla. Esimerkiksi pianoa soittaessa voi kokeilla soittaa yhtä säveltä ja sen jälkeen useampaa säveltä yhtä aikaa. Tämän jälkeen oppilaat voivat tutkia pareittain tai pienryhmissä tuottamiansa ääniaaltoja ja niiden eroja. Mikä ero ääniaalloilla on soitettaessa eri voimakkuuksilla? Mitä eroja löytyy eri taajuuksilla soitetuista tai eri soittimilla äänitetyistä ääniaalloista? Tämä kehittää kuvaajien tulkintaa ja auttaa ymmärtämään aaltofunktioita. Lisäksi tutkimukseen on myös sovellettavissa laskutehtäviä, kuten äänitettävän aallon taajuuden laskemista. Äänitystä varten on saatavilla ilmaisia sovelluksia, kuten Audacity Windowsille.

Kuvassa 14 on äänitetty kitaralla kolme raitaa, joissa on selvästi huomattavissa taajuuksien välinen ero. Tutkitaan sen tilannetta hieman tarkemmin. Matalammalla taajuudella äänitetyn ylimmän raidan ensimmäinen huippu on noin 0,0090 sekunnin kohdalla, kun taas korkeammalla taajuudella äänitetyn keskimmäisen raidan ensimmäinen huippu on noin 0,0045 sekunnin kohdalla. Tämä siis tarkoittaa, että keskimmäisellä raidalla sävel soi kaksinkertaisella taajuudella verrattuna ylimpään raitaan. Näiden jaksonpituuksien avulla saadaan laskettua taajuudet $f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}009\ s} \approx 111\ Hz\ ja\ f_2 = \frac{1}{0{,}0045\ s} \approx 222\ Hz$.



Kuva 14. Audacitylla äänitettynä kolme kitararaitaa. Ylimmässä raidassa soi noin 110 Hz taajuudella A-sävel, keskimmäisessä noin 220 Hz taajuudella A-sävel ja alimmassa raidassa sointuna A-duuri, eli vastaavat soinnut kuin kuvassa 12, mutta eri taajuuksilla.

Lisäksi yhden raidan sisältä voidaan havaita äänenvoimakkuuden laskeminen huippujen pienemisenä. Alimman raidan kohdalla on selkeästi havaittavissa monimutkaisempaa aaltoliikettä, joka johtuu siitä, että tällöin kolmen eri sävelen aallot yhdistyvät. Äänitettäessä on hyvä ottaa huomioon, että aallot eivät ole niin puhtaita mitä teoreettisesti, sillä äänitettäessä aaltoon tulee mukaan paljon pieniä häiriötekijöitä, kuten mikrofonin laatu ja taustahäly.

7 Yhteenveto

Musiikin integroiminen matematiikan opetukseen tapahtuu hyvin luonnollisella tavalla, sillä musiikin teoria pohjautuu hyvin vahvasti matematiikkaan. Tämän integraation avulla matematiikan tunteihin saa mukaan konkretiaa; esimerkiksi tutkimalla ääntä siniaaltoihin tutustuessa tai hyödyntämällä nuottien aika-arvoja, tahteja ja tahtilajeja murtolukujen ja niiden laskutoimituksien oppimisen tukena. Parhaillaan musiikki tarjoaa mahdollisuuden matematiikan teoriaan tutustumiseen oppilaiden omakohtaisen tutkimuksen kautta. Tutkimusten kautta uuden asian teorialle saadaan muodostettua hyvä perusta ja lisättyä myös motivaatiota, tukien siis innostavaa ja oppijalähtöistä matematiikan opetusta.

Toki musiikki tai sen tuottaminen itse ei välttämättä motivoi kaikkia oppijoita samalla tavalla, mutta musiikillisen elementin tuominen matematiikan oppitunnille tuo vaihtelua perinteisten oppituntien keskelle. Musiikki voi myös antaa matematiikkaan erilaisen näkökulman. Sen sijaan, että matematiikka olisi merkityksettömiä numeroita, kirjaimia ja symboleita, voi musiikki auttaa ymmärtämään paremmin näiden tarkoituksen. Tästä hyvänä esimerkkinä on toiminnallisuus, jota musiikin kautta saadaan lisättyä matematiikan oppitunneille; esimerkiksi eri kehonosiin taputettavan rytmin kautta päästään käsiksi muun muassa lukujen jaollisuuteen tai tanssin ja laulun lyriikoiden kautta voidaan pienemmille oppijoille tuoda tutuksi numeroita. Mahdollisuuksia ja variaatioita on lähes lukemattomia. Todettakoon siis yhteenvetona, että nämä ja muut musiikin tuomat hyötyvaikutukset, esimerkiksi aivotoiminnalle, antavat perusteita sen mukana kuljettamiseksi läpi oppijan elämän varhaiskasvatuksesta lukiokoulutukseen – kuten musiikki usein kulkee muutenkin arjessa mukanamme aina vauvasta vaariin.

Lähteet

Apiola, H. (2015, lokakuuta 21). *Matematiikkaa ja musiikkia*. http://math.aalto.fi/~apiola/intmath/musmat.html

Ellington NHS. (2020, huhtikuuta 21). *How to make music with water glasses! - Ayushman Choudhury*. https://www.youtube.com/watch?v=BcBbRzY20MA

How to Make Science Projects for Kids. (2013, elokuuta 16). How To Make A Water Xylophone—Science Projects. *How To Make Science Projects For Kids*. https://howtomakescienceprojectsforkids.com/how-to-make-a-water-xylophone/

Işıtan, S. I., & Doğan, M. (2020). Mathematics and Music Relationship: From Notes to Fractions. *Journal of Inquiry Based Activities*, *10*(2), 100–111.

Kaperi, P. (2020). *"Enemmän kuin aaltoliikettä" – musiikin ja matematiikan teoreettinen integrointimalli kouluympäristöön*. [pro gradu -tutkeilma: Taideyliopiston Sibelius-akatemia]. https://taju.uniarts.fi/bitstream/handle/10024/6956/nbnfi-fe2020112592945.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Marjanen, J. (2013). *"Ope, miks me lauletaan, vaikka meillä on matikan tunti?": Musiikin ja matematiikan oppisisältöjen integrointi*. [pro gradu -tutkielma: Jyväskylän yliopisto]. http://urn.fi/URN:NBN:fi:jyu-201402261290

Musiikkimatka.fi. (2022, maaliskuuta 10.). *Musiikki kuuluu kaikille ja kaikkialle! - Musiikkimatka.fi*. https://musiikkimatka.fi

Naiman, D. Q. (2022, maaliskuuta 10). *Sound Waves – Mathematics of Music*. https://www.ams.jhu.edu/dan-mathofmusic/sound-waves/

Niemelä, E. (2015). *Sanarytmien vaikutus kuultujen rytmien oppimiseen* [pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto]. https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/46368/1/URN%3ANBN%3Afi%3Ajyu-201506182379.pdf

Opipistenuotteja.fi. (2022, maaliskuuta 10). *13. Intervallit – OPI PISTENUOTTEJA*. https://www.opipistenuotteja.fi/13-intervallit/

Oppimateriaalikeskus OPIKE. (2012). *Akustiikka*. OPIKE. https://www.opike.fi/files/products/product_365/Paivanselvaa_Akustiikka.pdf

Rajala, J. (2016, lokakuuta 5). *Musiikkikasvatus varhaiskasvatuksessa*. https://prezi.com/cs8sg3q9goug/musiikkikasvatus-varhaiskasvatuksessa/

Rogness, J. (2022, maaliskuuta 10). *Soundwaves*. Noudettu 10. maaliskuuta 2022, osoitteesta https://www-users.cse.umn.edu/~rogness/math1155/soundwaves/

Science World. (2022, maaliskuuta 10). *Musical Bottles*. Science World. https://www.scienceworld.ca/resource/musical-bottles/

Shah, S. (2010). *An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music*. http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/cov

Summamutikka. (2022, huhtikuuta 25). *Jaollisuushorisontit*. https://blogs.helsinki.fi/summamutikka/jaollisuushorisontit/

Tamminen, T. (2015). *Orkesterinkone: rytmioppia*. YLE. http://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/11/26/rytmioppia

Vatanen, S. (2015). *Musiikkiako matematiikan tunnilla?* [pro gradu -tutkielma: Helsingin yliopisto]. https://core.ac.uk/download/pdf/33738271.pdf

Wright, D. (2009). *Mathematics and music*. American Mathematical Society.