Matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä

Riikka Palkki

Oulun yliopisto

Matematiikan opetuksessa voidaan käyttää niin sanottua *vertailumenetelmää*, jossa oppilaat tuottavat yhteen tehtävään useamman eri ratkaisutavan tai ne näytetään heille. Tämän jälkeen ratkaisutavoista keskustellaan vertaillen. Tavoitteena on lisätä oppilaiden matemaattista joustavuutta. Tässä fenomenografisessa tutkimuksessa selvitetään, millaisia käsityksiä 25 suomalaisella matematiikan opettajalla ja opettajaopiskelijalla on vertailumenetelmästä heidän tutustuttuaan siihen ensimmäistä kertaa. Osallistujat toivat esiin erilaisia hyötyjä: oppilaat voisivat oppia useita tapoja nähdä asioita, löytää itselleen sopivan ratkaisumenetelmän, opettajasta tulisikin valmentaja ja keskustelu lisääntyisi. Tutkimukseen osallistuneet olivat huolissaan, että oppilaita ei välttämättä kiinnosta useiden ratkaisutapojen käyttö, heillä ei ole valmiuksia siihen tai menetelmä vaatisi opettajalta liikaa.

Avainsanat: joustavuus, vertailumenetelmä, matematiikan opetus, matematiikan opettajat

Article details

LUMAT General Issue
Vol 6 No 1 (2018), 105–128

Received 1 January 2017
Accepted 27 September 2018
Published 3 October 2018

Pages: 24
References: 25
doi:10.31129/LUMAT.6.1.327

Contact: riikka.palkki@oulu.fi
www.lumat.fi

1 Vertailumenetelmä

Matematiikassa tarvitaan omaa ajattelua ja asioiden näkemistä eri näkökulmista. On tärkeää osata ratkaista tehtäviä eri tavoilla, jotta pystyy lähestymään haastaviakin ongelmia. *Vertailumenetelmäksi* kutsutaan useiden ratkaisutapojen käyttöä opetuksessa ja niiden vertailua keskustellen. Vertailumenetelmä on uusi opetusmetodi Suomessa, joten on tarpeen tutkia, miten matematiikan opettajat suhtautuvat siihen. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää laadullisella tutkimusotteella matematiikan opettajien ja opettajiksi opiskelevien käsitysten variaatiota vertailumenetelmästä heidän tutustuttuaan siihen ensimmäistä kertaa.

Vertailumenetelmä liittyy matemaattisen joustavuuden kehittämiseen, joten aluksi on tarpeen määritellä joustavuus. Tämän jälkeen perehdytään vertailumenetelmään ja sen käytön hyötyihin ja haasteisiin aiemman tutkimuksen valossa.

Matemaattinen tieto on perinteisesti jaoteltu käsitetietoon (conceptual knowledge) ja proseduraaliseen tietoon eli menetelmätietoon (procedural knowledge) (Hiebert & Lefevre, 1986). Star (2005) on ehdottanut proseduraalisen joustavuuden lisäämistä jaotteluun. Joustavuus määritellään tiedoksi useista matemaattisen ongelman ratkaisutavoista ja kyvyksi valita tehtävään matemaattisesti sopivin ratkaisutapa (Rittle-Johnson & Star, 2007; Star & Rittle-Johnson, 2008). Proseduraalinen joustavuus on yhteydessä sekä käsite- että menetelmätietoon, ja joustavat ratkaisijat tekevät tehtäviä myös nopeammin ja oikeellisemmin (Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011; Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). Matematiikan opetuksen tulisi mekaanisten taitojen kehittämisen sijaan tähdätä käsitteelliseen ymmärtämiseen, jotta tietoa voidaan soveltaa joustavasti (Hiebert & Carpenter, 1992). Silti oppilaat uskovat, että tehtäviä ratkaistaan vain yhdellä tavalla, jonka opettaja näyttää (Schoenfeld, 1992).

Joustava ongelmanratkaisija esimerkiksi ratkaisee esimerkkitehtävän kuvan 1 jälkimmäisellä ratkaisutavalla. Hän kuitenkin osaa myös käyttää ratkaisutapoja soveltavasti, jos tehtävä onkin erityyppinen ja ensimmäinen ratkaisutapa parempi. Joustavuuden oppiminen on tärkeää, sillä jotta voisi varmistaa oppilaiden ymmärtävän tekemiään manipulaatioita, heillä täytyy olla myös tietty määrä joustavuutta (Hiebert & Carpenter, 1992).

$$
\begin{aligned}
300(x+4) &= 600 \\
300x + 300\cdot 4 &= 600 \\
300x + 1200 &= 600 \\
300x + 1200 - 1200 &= 600 - 1200 \\
300x &= -600 \\
\frac{300x}{300} &= \frac{-600}{300} \\
x &= -2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
300(x+4) &= 600 \\
\frac{300}{300}(x+4) &= \frac{600}{300} \\
x+4 &= 2 \\
x+4-4 &= 2-4 \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Kuva 1. Kaksi eri ratkaisutapaa.

Vertailun käyttö voi liittyä matematiikan eri osa-alueisiin, josta on esimerkkejä tässä tutkimuksessa käytetyissä Liitteen 1 tehtävissä. Joustavuuden kehittämiseksi voidaan pyytää ratkaisemaan tehtävä useammalla eri tavalla tai antaa valmiiksi ratkaisutapoja, kuten Liitteen 1 tehtävissä tehdään.

Vertailumenetelmä perustuu Jon R. Starin ja hänen kollegoidensa useiden vuosien työhön. Tutkimusten perusteella matemaattista joustavuutta voidaan lisätä käyttäen kolmea askelta (Yakes & Star, 2011), joita kutsun nyt vertailumenetelmäksi:

1. Vertailtavat eri ratkaisutavat esitetään rinnakkain
2. Oppilaat käyvät vertailukeskustelun eri ratkaisutavoista opettajan ohjaillessa keskustelua
3. Oppilaat saavat tuottaa samaan ongelmaan useita ratkaisuja tai luoda uusia yhtälöitä annetulla ratkaisutavalla ratkaistavaksi.

Vertailu voidaan tehdä joko oppilaiden itse tuottamia ratkaisuja tai esimerkiksi kahden kuvitteellisen oppilaan valmiita ratkaisuja käyttäen. Jälkimmäisissä, niin sanotuissa vertailutehtävissä oppilaiden tehtävänä on vertailla ja analysoida eri ratkaisutapoja. Vertailutehtäviä on saatavilla myös suomenkielisinä osana Joustava yhtälönratkaisu -materiaalia, ja niiden käytöstä on nähty hyötyä esimerkiksi virhekäsitysten selvittämisessä (JYR, 2018; Palkki, 2016).

Vertailumateriaalin käyttö oli yhdysvaltalaistutkimuksessa yhteydessä proseduraalisen tiedon kasvuun, ja useista ratkaisutavoista ja vertailutehtävistä ovat tutkimusten mukaan hyötyneet eritasoiset oppilaat (Star, Pollack, Durkin, Rittle-Johnson, Lynch, Newton, & Gogolen, 2015; Star & Rittle-Johnson, 2008; Lynch & Star, 2014a). Joustavuuden lisääntyessä oppilas pystyy muokkaamaan strategioitaan ratkaistessaan uudentyyppisiä tehtäviä ja myös hänen käsitetietonsa kasvaa (Star & Rittle-Johnson, 2008). Joustavuuden kehittäminen voidaan nähdä askeleena myös ongelmanratkaisun oppimisen suuntaan (Star & Rittle-Johnson, 2008; Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009). Esimerkiksi lineaarisen yhtälönratkaisun kontekstissa voidaan harjoitella eri ratkaisutapojen käyttöä ja valita tehtävään parhaiten soveltuva ratkaisutapa, mikä on avoimemmassakin tehtävässä tarvittava taito. Taitava ongelmanratkaisija käyttää useita ratkaisutapoja (Guberman & Leikin, 2013).

Yhdysvaltalaistutkimuksessa oppilaat tekivät vertailutehtäviä. Tällöin jälkitestin korkeaan joustavuuteen liittyivät hyvät esitiedot matematiikassa ja tyttö sukupuolena (Star, Newton, Pollack, Kokka, Rittle-Johnson, & Durkin, 2015). Vertailumateriaalin käyttöön vaikuttavat paitsi oppilaisiin, myös opettajiin liittyvät seikat. Lynch ja Star (2014b) selvittivät yhdysvaltalaisopettajien käsityksiä eri ratkaisutapojen käytöstä haastatteluilla ja kyselyillä. Eri ratkaisutapojen käytön hyvinä puolina opettajat näkivät yksilöllisten erojen huomioimisen, matemaattisen ymmärtämisen kehittämisen, onnistumisen todennäköisyyden lisäämisen oppilaalle sopivan metodin löytymisen myötä, affektiiviset ja motivaatioseikat ja tehokkuuden lisääntymisen. Affektiivisilla ja motivaatioseikoilla tässä tarkoitettiin esimerkiksi oppilaiden osallisuuden lisäämistä sekä kyllästymisen ja turhautumisen tunteen vähenemistä. Negatiivisina puolina tutkimuksen opettajat puolestaan pitivät sitä, että käyttö sekoittaa oppilaan ajattelua tai aika ei riitä. Huonoina puolina nähtiin myös affektiiviset tekijät ja motivaation huononeminen, oppilaiden vastustus, oppilaiden uskomukset matematiikasta (on vain yksi tapa ratkaista tehtävä), opettajan tiedon rajat, fyysiset rajat, opettajan työn lisähaasteet ja opettajan tiedon puute useista strategioista (Lynch & Star, 2014b). Opettajat siis näkivät useita mahdollisuuksia, mutta melko paljon riskitekijöitä.

Yakes ja Star (2011) puolestaan pitivät tärkeänä lisätä opettajien omaa matemaattista joustavuutta ja tietoutta vertailumenetelmästä, jotta opettajat voisivat menestyksekkäästi käyttää vertailumenetelmää luokkahuoneessa. He pitivät osana täydennyskoulutusta 24 opettajalle vertailumenetelmän käytöstä päivän koulutuksen, jonka aikana opettajat saivat esittelyn aiheesta, tekivät itse matematiikan tehtäviä vertailumenetelmää käyttäen ja myöhemmin neljän kuukauden ja yhdeksän kuukauden päästä reflektoivat aihetta lisää ensin verkossa ja sitten ryhmäkeskustelussa käytettyään menetelmää työssään. Opettajat kertoivat alkaneensa nähdä vertailumenetelmän hyödyllisyyden ja mahdollisuudet vaikuttaa sillä oppilaiden matemaattiseen joustavuuteen. Oppilaat voivat miettiä laajemmin asioita erilaisten ratkaisutapojen kautta sekä vertailukeskustelun avulla oppia selittämään ja puolustamaan ajatteluaan. Lisäksi oppilaat voivat tarkistaa ratkaisun tekemällä sen kahdella eri tavalla. Haasteina opettajat näkivät vaikeuden antaa oppilaiden keskustella sen sijaan, että luennoivat itse. Opettajat huomasivat, että yhteen menetelmään keskittyminen sitoi omaa ajattelua, ja toisaalta oppitunneilla opettaja valitsi intuitiivisesti omasta mielestään parhaan ratkaisutavan muttei selittänyt perusteluita oppilaille. Opettajat myös pelkäsivät, että menetelmä sekoittaa oppilaita (Yakes & Star, 2011).

Bingolbal (2011) huomauttaa, että monissa tutkimuksissa on hyväksytty, että opettajalla on tärkeä rooli useiden ratkaisutapojen tuomisessa opetukseen. Silti opettajien avoimuutta useiden ratkaisutapojen käyttöön ja valmiuksia arvioida avoimia vastauksia on tutkittu vain vähän. Bingolbal on tehnyt 500 turkkilaiselle opettajalle kyselytutkimuksen, jonka mukaan opettajat eivät ole avoimia useille erilaisille ratkaisuille, ja heillä on vaikeuksia vastata oppilaiden avoimiin kysymyksiin ja arvioida oppilaiden avoimia vastauksia (Bingolbal, 2011).

Opettajien näkemyksiä eri ratkaisutapojen ja vertailun käytöstä on tutkittu jonkin verran, mutta niitä on edelleen tarpeen selvittää lisää, sillä vertailumenetelmä on uusi opetusmetodi Suomessa. Niin ikään opettajaopiskelijoiden näkökulmia on syytä tuoda esiin, sillä niitä ei juuri ole tutkittu aiemmin.

2 Tutkimuksen toteutus

2.1 Metodologia

Metodologisena lähtökohtana tälle tutkimukselle on fenomenografia. Fenomenografiassa tutkitaan tiettyä ilmiötä, käsitettä tai periaatetta, jonka ihmiset voivat ymmärtää rajallisella määrällä eri tapoja (Marton, 1988; Huusko & Paloniemi, 2006). Tarkoituksena on siis selvittää käsitysten variaatio. Fenomenografiassa tutkitaan ihmiselle syntyviä käsityksiä huomioiden ihmisten ja ympäröivän maailman suhde, ja tutkitaan laadullisesti eri tapoja, joilla ihmiset käsittävät maailman ympärillään (Marton, 1988; Syrjälä, Ahonen, Syrjänen & Saari, 1994). Fenomenografiassa luodaan teorian pohjalta merkityskategorioita ja edelleen ylemmän tason kategorioita, jotka muodostavat selitysmallin eli teorian (Syrjälä ym., 1994; Huusko & Paloniemi, 2006). Vaikka selville saatavat käsitykset eivät olekaan yleistettävissä, voidaan laadullisen tutkimuksen tavoin saavuttaa merkityksellistä tietoa mahdollisista käsityksistä. Analyysi etenee kolmessa vaiheessa: 1) merkityksien etsiminen, 2) kategorioiden muodostaminen sekä 3) abstraktimman kuvaustason ja kategorioiden välisten erojen etsiminen (Huusko & Paloniemi, 2006).

Tutkimus toteutettiin ryhmähaastatteluna. Ryhmähaastattelu tiedonkeruumetodina viittaa aihepiirin ympärillä käytävään ryhmän fokusoituun keskusteluun, jossa ryhmän vetäjä eli moderaattori ei kysele tiettyjä kysymyksiä vuorotellen, vaan tarjoaa osallistujille virikkeitä esimerkiksi kuvien, muun materiaalin tai kysymysten avulla ja mahdollisuuden vuorovaikutuksen kautta tuottaa aineistoa (Valtonen, 2005). Nyt keskustelun virikkeenä toimivat matematiikan tehtävät ja reflektiokysymykset.

Fenomenografisen tutkimuksen tulokset ovat kategorioiden kuvaukset, ja kategorioiden sisältö on tärkein tuotos (Marton, 1988). Tarkoituksena on myös löytää abstraktimpi kuvaustaso ja kategorioiden väliset erot (Huusko & Paloniemi, 2006). Tämän tutkimuksen tavoitteena on lisätä laadullista ymmärrystä opettajien käsityksistä vertailumenetelmästä ja sen toteutuksesta.

2.2 Tutkimuskysymykset

Tässä tutkimuksessa ei eritellä tarkemmin aiheeseen liittyviä matematiikan tehtäviä ja niistä herääviä ajatuksia, vaan pitäydytään menetelmän esiin tuomissa pedagogisissa ajatuksissa. Tutkimuksessa ei myöskään olla kiinnostuneita informanteista sinänsä, vaan heidän tuottamastaan aineistosta (Marton, 1988), joten opettajien taustoja ei yksilöidä eikä etsitä esimerkiksi kausaalisia suhteita vaan kuvataan laadullisesti erilaisia käsityksiä vertailumenetelmästä. Tutkimusongelmana on selvittää matematiikkaa opettavien luokan- ja aineenopettajien sekä opettajaopiskelijoiden käsityksiä vertailumenetelmästä. Tutkimuskysymykset ovat seuraavat:

1. Millaisia erilaisia käsityksiä matematiikan opettajilla ja opettajaopiskelijoilla on vertailumenetelmästä?
2. Millaisia eroja on matematiikan opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksissä vertailumenetelmästä?

Kysymykset pyritään ratkaisemaan selvittämällä, mitä tutkittavat ajattelevat vertailumenetelmän käytöstä suhteessa omaan opetukseensa ja omaan matemaattiseen osaamiseensa.

2.3 Tutkimusaineisto

Tutkimukseen osallistuneet opettajat olivat sekä luokan- että aineenopettajia, jotka osallistuivat opettajien matematiikan täydennyskoulutuskokonaisuuteen vuonna 2014. Opettajia tutkimukseen osallistui yhdeksän (kolme kolmen hengen pienryhmää, aineisto A). He olivat käyneet koulutuskokonaisuudesta vähintäänkin yhden osion, osa useamman. Vertailumenetelmää käsittelevä osuus kesti puolitoista tuntia, josta noin puoli tuntia käytettiin keskusteluun. Toisena ryhmänä ovat matematiikan opettajaksi opiskelevat, joille menetelmä esiteltiin osana erästä didaktispainotteista matematiikan yliopistokurssia vuonna 2015. Heitä oli 16 (neljä neljän hengen pienryhmää, aineisto B). Tutkimukseen osallistuneilta kysyttiin lupa keskusteluidensa käyttämiseen tutkimusaineistona. Heidän nimensä muutettiin esimerkiksi muotoon ”Yläkoulun opettaja A”.

Opetustuokiossa opettajille kerrottiin aluksi lyhyesti vertailumenetelmästä, josta osa opettajista oli kuullut hiukan aiemmin, opettajaopiskelijoista ei kukaan. Osallistujat saivat itse muodostaa kolmen (opettajat) tai neljän (opettajaopiskelijat) hengen ryhmiä. Heille annettiin ryhmissä tehtäviksi kullekin ryhmälle kaksi Yakesin ja Starin artikkelin (2011) tehtävää sisältäen yhteensä neljä kohtaa (Liite 1). Tehtävissä tuli ratkaista matematiikan ongelmia kirjoittaen rinnakkain kaksi eri ratkaisutapaa. Tehtävät liittyivät pääosin yhtälönratkaisuun. Opettajille esitettiin tehtävien teon lomassa ohje vertailla tehtäviä toisiinsa. Tehtävät tehtyään ryhmät jakaantuivat uudelleen siten, että kussakin ryhmässä oli yksi jäsen kaikista aiemmista ryhmistä. Kaikki esittelivät omat tehtävänsä ja niiden erilaiset ratkaisutavat, joista keskusteltiin ryhmissä.

Tehtävien läpikäynnin jälkeen opettajille näytettiin Yakesin ja Starin aiemmin (2011) käyttämät itsereflektiokysymykset:

1. Pohdi vertailevaa tehtävien tekemistä suhteessa omaan opetukseesi.
2. Pohdi vertailevaa tehtävien tekemistä suhteessa omiin matematiikan kykyihisi ja ymmärtämiseesi.

Kysymysten tarkoituksena oli saada opettajat pohtimaan tehtäviä ja vertailumenetelmän käyttöä sekä opetuksen että oppimisen kannalta. On tärkeää peilata osallistujien omaa kokemusta, jotta he voivat samaistua oppilaan rooliin ja saada paremman käsityksen menetelmästä.

Matematiikan tehtävät ja itsereflektiokysymykset toimivat nyt ikään kuin ryhmähaastattelun liikkeellepanijoina. Tutkittavat keskustelivat näistä kysymyksistä ryhmissä ja lopuksi lyhyesti kaikki yhdessä vetäjän johdolla. Vetäjänä eli moderaattorina toimi opettajien kohdalla heidän täydennyskouluttajansa ja opettajaopiskelijoiden kohdalla tutkija itse. Moderaattorin rooli oli kertoa lyhyesti joustavuudesta ja esittää itsereflektiokysymykset sekä kierrellä luokassa toistamassa kysymyksiä tarvittaessa. Tutkimuksen aineistona käytettiin keskusteluosuuksia, jotka käytiin sen jälkeen, kun itsereflektiokysymykset oli annettu ja osallistujat työskentelivät pienryhmissä, joihin he olivat jakaantuneet tehtävien tekemisen jälkeen. Keskustelua käytiin pienryhmissä noin 25 minuuttia ja yhteisesti noin viisi minuuttia. Ryhmähaastattelun kesto oli siis noin puoli tuntia. Ryhmien keskustelut videoitiin yhdellä kameralla. Kaikkien ryhmien tuotokset äänitettiin ja myöhemmin litteroitiin käyttäen sanatarkkaa litterointia kuitenkaan merkitsemättä taukoja tarkasti. Puheenvuorojen alkuun merkittiin koodi kullekin opettajalle. Litteroitu aineisto analysoitiin käyttäen QSR nVivo 10 -tietokoneohjelmaa. Äänitystä käytettiin, jotta kaikkien ryhmien tarkat puheenvuorot saadaan tallennettua mahdollisimman vähän työskentelyä ja keskustelua häiriten. Lisäksi tutkija tarkkaili tilannetta ja kirjoitti omia muistiinpanojaan.

2.3 Luokitteluprosessin kuvaus

Analyysin tavoitteena on luoda merkitysverkosto (Metsämuuronen, 2006). Nyt pyrittiinkin kokoamaan merkityksiä niiden samankaltaisuuden perusteella eri luokkiin ja löytämään niistä edelleen yhteisiä tulkintoja. Tutkijan tulisi aloittaa tulkinta yksinkertaisista asioista edeten käsitteellisempää tulkintaa kohti (Syrjälä ym., 1994). Aluksi aineisto luettiin läpi muutamia kertoja, jotta keskeiset seikat hahmottuisivat. Sitten aineisto jaettiin osateksteiksi eli segmenteiksi kirjaten ylös käsitteellisen luokan selitys (Syrjälä ym., 1994). Segmenttinä käytettiin yhden ihmisen puheenvuoroa. Aineistot A ja B käsiteltiin erillisinä osioina (erilliset QSR nVivo -tiedostot) kuitenkin luoden yhteinen kategoriarakenne. Luokitteluprosessi ei fenomenografiassa (Marton, 1988) ole pelkästään datan järjestelyä, vaan siinä erottuvien piirteiden etsimistä. Etsitään siis rakenteellisia eroja siinä, miten ihmiset määrittelevät jonkin ilmiön. Luokittelussa keskitytään johonkin tutkijan tärkeäksi pitämään asiaan. Luokkia ei päätetä etukäteen toisin kuin perinteisessä sisällönanalyysissä (Marton, 1988). Tämän mukaisesti tässä tutkimuksessa pyrittiin löytämään luokkia, jotka kuvaavat erityyppisiä vertailumenetelmästä herääviä käsityksiä.

Luokitteluprosessissa etsittiin aluksi alemman tason kategorioita, joista edettiin myöhemmin ylemmän tason kategorioihin. Ensin alakategorioista, sitten ylemmistä kategorioista muodostettiin tulkinnat ja lopulta synteesi kunkin kategorian kuvailemiseksi. Kategorisointiprosessi eteni suoraviivaisesti menetelmän haasteiden ja hyvien puolten jaottelun osalta. Vähitellen alkoi hahmottua muita kategorioita, kuten opettajan oma käsitteellinen ja proseduraalinen osaaminen ja ajatukset menetelmän käyttöönottamisesta. Opettajan ja oppilaan käsitteelliseen ymmärrykseen viittaavia puheenvuoroja oli aluksi vaikea erottaa toisistaan, sillä ei ollut heti selvää, puhuivatko osallistujat itsestään vai mahdollisesti omista oppilaistaan. Alakategorioita syntyi ja yhdistyi toisiin kategorioihin luokittelun seuraavassa vaiheessa. Esimerkiksi kategoriasta ”Suhtautuminen menetelmän käyttöön omassa opetuksessa” pystyi puheenvuorot luokittelemaan vielä sen mukaan, mitä mieltä oltiin yhden menetelmän käytöstä tai ylipäänsä opetusmenetelmien tarpeesta. ”Käytännön toteutus” -kategoria tuntui liittyvän menetelmästä koettuihin hyötyihin ja haittoihin. Luokittelu jäsentyi siten, että segmenttien tarkempi sijainti luokittelussa löytyi yhä helpommin. Ydinkategoriat alkoivat hahmottua.

Tekstejä lukiessa heräsi tarve laajentaa kategorisointia myös esimerkiksi matematiikkaan liittyviin aiheisiin ja yksittäisten informanttien käsitysten muutoksiin, mutta näihin luokitteluihin ei kuitenkaan ryhdytty. Toiminta oli fenomenografisen tutkimusstrategian mukaista ja toisaalta ajatuksien väliset yhteydet rajattiin nyt tulkinnassa mahdollisesti syntyviin seikkoihin sen sijaan, että kiinnitettäisiin huomio esimerkiksi yksittäisen henkilön ajatuksiin. Siteerausten (puheenvuorojen) löytämisen jälkeen onkin oleellista kääntää tarkkaavaisuus yksilöstä siteerausten merkityksiin (Marton, 1988).

3 Tulokset

Tutkimushavainnot jakaantuivat aineistolähtöisessä luokittelussa kolmeen pääkategoriaan: 1) Osallistujien oma oppiminen, 2) Menetelmän haasteita ja hyötyjä ja 3) Suhtautuminen menetelmän käyttöön omassa opetuksessa, joista tässä artikkelissa käsitellään kahta ensimmäistä kategoriaa. Kolmas kategoria on jätetty pois, sillä se erosi muista kategorioista ja muodostaisi oman tutkimusaiheensa.

Puheenvuorojen (segmenttien) jakaantuminen on luokiteltu taulukkoon 1. ”Menetelmän hyödyt ja haasteet” -kategoriassa esteitä menetelmän käyttöönotolle esitetään 23 opettajapuheenvuorossa ja viidessä opettajaopiskelijan puheenvuorossa. Hyötyjä puolestaan on tuotu ilmi 34 opettajapuheenvuorossa ja 22 opettajaopiskelijapuheenvuorossa. Keskusteluissa painottui hyötyjä selvästi enemmän kuin haasteita. Taulukko on silti vain suuntaa antava ja kertoo lähinnä luokitteluprosessista. Seuraavaksi esitellään kategoriat tarkemmin ja sitten palataan niiden sisältöön sekä opettajien ja opiskelijaopiskelijoiden välisiin eroihin.

Taulukko 1. Kategorioihin luokiteltujen puheenvuorojen lukumäärät.

3.1. Osallistujien oma oppiminen	**Opettajat (n = 9)**	**Opiskelijat (n = 16)**
Hyöty omalle laskutaidolle	3	17
Hyöty omalle käsitteelliselle osaamiselle	9	3
Ei hyötyä omalle oppimiselle	0	4
En osaa sanoa	0	2
3.2. Menetelmän haasteita ja hyötyjä		
Haasteita	puheenvuoroja 23	puheenvuoroja 5
Vain lahjakkaille, ei valmiuksia	7	1
Sekoittaa oppilaita	5	1
Ei kiinnosta	3	2
Vaatimukset opettajalle	4	0
Ei kehitä ymmärrystä	3	0
Ajanpuute	1	1
Hyötyjä	puheenvuoroja 34	puheenvuoroja 23
”Jotain liikahtaa päässä eri tavalla”	9	8
Opitaan matematiikasta yleensä	6	2
Parhaan menetelmän löytäminen	2	6
Vastauksen tarkistaminen	4	3
Opettajasta tuleekin valmentaja	7	0
Opitaan useita tapoja nähdä asioita	3	2
Keskustelu lisääntyy	3	0
Kertaaminen	0	2

3.1 Osallistujien oma oppiminen

Tähän pääkategoriaan on luokiteltu aineistossa olevat puheenvuorot, jotka viittaavat opettajien ja opiskelijoiden omiin kokemuksiin matematiikan tehtävien tekemisestä kahta eri ratkaisukeinoa käyttäen täydennyskoulutuksessa tai osana kurssiaan. Kategoriassa tuotetaan synteesi alakategorioissa syntyneiden tulkintojen pohjalta. Alakategoriat kuvauksineen ja esimerkkeineen on esitetty taulukossa 2.

Taulukko 2. Osallistujien oma oppiminen.

Kategorian nimi ja kuvaus (puheenvuoroja opettajilta + puheenvuoroja opettajaopiskelijoilta)	Esimerkki
Hyöty omalle laskutaidolle (3+17) Puheenvuorot, joissa tuotiin esille menetelmän hyötyjä opettajan omalle matematiikan menetelmälliselle eli proseduraaliselle osaamiselle.	Yläkoulun opettaja A: *”Itellä ainakin huomasin, että kannattaa niinku tuolla menetelmällä. Että jopa itellä, jolla luulin, että on tuota aika vankka laskurutiini niin… niin… selvästi helpottaa tämmösiä, jossa on paljon montaa muuttujaa.”*
Hyöty omalle käsitteelliselle osaamiselle (9+3) Puheenvuorot, joissa opettajat pohtivat menetelmän käytön vaikutusta omaan käsitteelliseen osaamiseen.	Alakoulun opettaja B: *”Kyllä tässä lamppu sytty monta kertaa.”*
Ei hyötyä omalle oppimiselle (0+4) Puheenvuorot, joissa kerrotaan, että menetelmästä ei ole hyötyä omalle oppimiselle tai ratkaisutavan käyttöä ei pidetä tarpeellisena.	Opettajaopiskelija G: *”- - Tavallaan se. Että eihän se niinku. Mutta vois niinku kysyä, että tarviiko käyttää turhaan?”*
En osaa sanoa (0+2) Puheenvuorot, joissa ei osattu sanoa menetelmän hyödyistä tai haitoista omalle oppimiselle.	Opettajaopiskelija H: *”Tuntuu niin vaikealta tässä vaiheessa sanoa, miten se on vaikuttanut omaan ymmärtämiseen. ”*

Opettajat kokivat, että useamman menetelmän käyttö tukee oppimista, voi helpottaa vankankin laskurutiinin laskijan tekemistä ja palauttaa mieleen matematiikan asioita. Kuitenkaan opettajat eivät tuoneet esiin monia hyötykohtia omalle laskutaidolle (kolme puheenvuoroa). Osallistujat pohtivat myös käsitteellistä osaamista. Opettajat kokivat, että kahden eri menetelmän käytöstä oli monia hyötyjä: se auttoi palauttamaan mieleen matematiikan asioita, oivalluksia tuli useasti, toisella tavalla tehdessään saattoi huomata ensimmäisessä tavassa olleen virheen, menetelmä auttoi ymmärtämään käsitteitä, kun toisella ratkaisutavalla näki eri näkökulman. Menetelmä myös lisäsi matematiikan prosessien ymmärtämistä.

Opettajaopiskelijoilta tuli melko vähän kommentteja käsitteelliseen osaamiseen liittyvään kategoriaan. Opettajaopiskelijat painottivat hyötyä laskutaidolle eivätkä niinkään käsitteelliselle osaamiselle, ja osa näki, etteivät useat ratkaisutavat ole tarpeen tai että mieluummin lähtee liikkeelle kokeillen. Osa opettajaopiskelijoista koki, että menetelmän käytöstä ei olisi ollenkaan hyötyä, tai eivät pysty arvioimaan hyötyä. Mahdollisesti menetelmän pohtiminen tuntui vaikealta ilman opettajakokemusta, sillä opiskelijat eivät olleet tottuneet miettimään erilaisten menetelmien vaikutuksia oppimiseen, edes omaansa. Kuitenkin tämä alakategoria on luokittelemisen arvoinen, ja se peilaa opiskelijoiden mahdollisuuksia ylipäänsä pohtia menetelmää.

3.1 Menetelmän haasteita ja hyötyjä

Tähän pääkategoriaan luokiteltiin aineistosta tekstejä mahdollisista esteistä ja hyödyistä menetelmän opetuskäytössä. Taustalla ovat opettajien ja opettajaopiskelijoiden näkemykset siitä, miten oppilaat voisivat suhtautua usean ratkaisutavan ja vertailumenetelmän käyttöön opetuksessa.

Haasteita

Tähän kategoriaan luokiteltiin aineistosta opettajien ja opettajaopiskelijoiden tekstejä liittyen menetelmän oletettuihin huonoihin puoliin ja esteisiin, joita he näkivät vertailumenetelmän käyttämisessä opetuksessa. Kategorioiden kuvaukset ja esimerkkisitaatit on esitetty taulukossa 3. Alakategoriat on esitetty puheenvuorojen määrän mukaisessa järjestyksessä.

Taulukko 3. Menetelmän asettamia haasteita.

Kategoria ja luokitteluperusteet	Esimerkki
Vain lahjakkaille, ei valmiuksia (7+1) Puheenvuorot, joiden mukaan menetelmä soveltuu vain lahjakkaille eikä heikosti pärjänneillä oppilailla ole valmiuksia käyttää menetelmää.	Alakoulun opettaja C: *”… Mää niinku aattelen just tuota eriyttämistä, niin silloin mun mielestä mennä siihen, että kaikki sais jotain. Niin silloin, kun antaa sen yhen niinku must-tavan, niin se ehkä se heikoinkin saa siitä jonkun mallin, niin että se kuitenkin jotakin omaksuu.”*
Sekoittaa oppilaita (5+1) Puheenvuorot, joiden mukaan menetelmä sekoittaa oppilaita.	Yläkoulun opettaja B: *”Tai jos oppilas oppii jonkun menetelmän johonkin ja sitten sanotaan, että voi laskea eri tavalla. Joo ei ei mä meen sekasin. Elä, elä mulle ennää, mää ossaan sen tällä tavalla. Elä puhu mulle, uu…”*
Ei kiinnosta (3+2) Puheenvuorot, joiden mukaan oppilaita ei kiinnosta tai he siirtyvät sijaistoimintoihin.	Lukion opettaja A: *”…(Mä otin) kahen pisteen välinen vektori kolmella tavalla ihan samasta vektorista. Kyllä musta tuntuu. Niinku se ajattelu kolmella eri tavalla. Ei niitä välttämättä kiinnosta. Pitäis piirtää uus vektori kolmella eri tavalla. Mitä väliä, vastaus tiedetään, ollaan perillä.”*
Vaatimukset opettajalle (4+0)	Lukion opettaja A: *”Siinä pittää opettajan tehä töitä myöskin sen kannalta, että sä et voi aina tehä niin, että – minä sanon ja te laskette näin.”*

Puheenvuorot, joiden mukaan menetelmä vaatii opettajilta ajattelun muutosta ja uutta tapaa järjestää opetusta.	Opettajaopiskelija O: *”Tuossa on vähän se käytännön haaste, niinku tämä ryhmä sanoikin. Pittää valita. Ei voi koko ajan kahta eri ratkaisua käyä taululla joka tunti läpi [hymistelyä], että tällä tavalla ja tällä tavalla. Ei voi joka asiasta aina tehdä monella eri tavalla kuitenkaan. ”*
Ei kehitä ymmärrystä (3+0) Puheenvuorot, joiden mukaan menetelmä ei kehitä ymmärrystä ja sen käyttö jää mekaaniseksi suorittamiseksi.	Alakoulun ja yläkoulun opettaja A: *” Mutta en tiiä, tuleeko sitä ajateltu sen enemmän, ettei se oo niinku mekaaninen suoritus, että tässä lasketaan näin ja tässä lasketaan näin. Auttaako se nyt ajattelemaan sitten syvällisemmin, että mikä tässä on niinku, mistä se niinku tulee.”*
Ajanpuute (1+1) Puheenvuorot, joiden mukaan ei ole aikaa käyttää eri ratkaisutapoja.	Yläkoulun opettaja B: *”Niin. Kuhan siihen ois aikaa enemmän… ((vaimeasti naurahtaa)) … käydä niitä muitakin tapoja.”*

Sekä opettajat että opettajaopiskelijat kokivat vertailumenetelmän käyttämisen riskinä olevan, että se sekoittaa etenkin heikoimpien oppilaiden ajatuksia. Menetelmä myös vaatii tiettyjä ajattelun valmiuksia, oppilaita ei kiinnosta usea ratkaisutapa, se vaatii opettajilta paljon eikä kehitä ymmärrystä tai sen käyttämiseen ei löydy aikaa. Joidenkin näkemyksen mukaan menetelmä voidaan toteuttaa mekaanisesti. Jotkut osallistujat tuntuivat ajattelevan, että hitaammin edistyvien tulee oppia yksi menetelmä huolella. Opettajaopiskelijat löysivät paljon vähemmän esteitä menetelmän käyttöönotolle kuin opettajat.

Hyötyjä

Tähän kategoriaan luokiteltiin aineistosta opettajien ja opettajaopiskelijoiden tekstejä menetelmän oletetuista hyödyistä. Kategorioiden kuvaukset ja esimerkkisitaatit on esitetty taulukossa 4. Alakategorioista ensin on esitetty se, jossa on eniten puheenvuoroja.

Taulukko 4. Menetelmän hyötyjä.

Kategoria ja luokitteluperusteet	Esimerkkejä
”Jotain liikahtaa päässä eri tavalla” (9+8) Puheenvuorot siitä, miten menetelmän käyttö edistää oppilaiden ajattelua siitä, että asioita voi tehdä eri tavoin.	Yläkoulun opettaja C: *”Onhan se totta, että on vaikea, se on vertailla, jos et toista ymmärrä. Että kyllähän sun pitää ymmärtää se toinen, että mitä tässä tapahtuu. Mutta toisaalta se sitten saattaa taas… Näissä joissakin tehtävissä… olla tikapuu siihen, että mitä tapahtuu. Jos ei esimerkiksi ymmärrä tuossa tehtävä kutosessa [ks. liite 1], että mitä se supistaminen tarkottaa, niin sitten kun vertailee näitä, niin saattaakin hoksata, että aii, tuon takia tuolla on tuo että.”* Opettajaopiskelija P: *”No pitäis, päästä eroon [rutiinien opettamisesta]. Ja tuntuu, että tämä on nimenomaan tapa, miten vois luovuutta synnyttää niissä, että ne oppis ajattelemaan ite.”* Opettajaopiskelija H: *”... Että just sitä käyttää kahta eri menetelmää eri tehtävissä, niin se saattaa sekottaa, että miksi nyt ei tehty.”*
Opitaan matematiikasta yleensä (6+2) Puheenvuorot siitä, miten menetelmän käyttö tuo esiin matematiikan oikeaa luonnetta, esimerkiksi useiden reittien etsimistä.	Lukio-opettaja A: *”Kyl mun mielestä aika keskeinen on se, tää just, että tehtäviä voi ratkoa monella tavalla.”* Alakoulun opettaja B: *”Kyllähän tämä sitä ajatusta jäsentää, mikä on niinku matematiikan perustarkoitus, että oppii jäsentää asioita.”*
Parhaan menetelmän löytäminen (2+6) Puheenvuorot siitä, miten menetelmä mahdollistaa oppilaalle sopivimman, nopeimman tai tehokkaimman ratkaisutavan valinnan.	Opettajaopiskelija E: *”-- käyttää samaan tehtävään kahta eri tapaa, niin minä saatan ymmärtää siitä ekasta, vaikka toisesta en ymmärtänyt. Niinku nyt tarkotin eriyttämistä alaspäin heikommille oppilaille.”* Opettajaopiskelija O: *”Loppujen lopuksi sen toisenkin tavan esittäminen on vaan, että antaa oppilaille lisää työkaluja. Ne ei välttämättä osaa tai halua käyttää niitä, mutta että ne on esitetty.”* Opettajaopiskelija F: *”Toisaalta voihan sanoa, että voi laskea lineaarikombinaationkin avulla, jos se on nopeampi.”*
Vastauksen tarkistaminen (4+3) Puheenvuorot siitä, miten menetelmän käyttö auttaa tarkastamaan, onko ratkaisu oikein.	Yläkoulun opettaja D: *”Yhen tunnin pohtimisen se vaati, mutta oli se ihana kun ne ite halus sitten jossakin vaiheessa. Alkutunnista ne oli sitä mieltä, että vaikka meillä on nämä kaks eri tapaa samaan tehtävään, jos ratkaistaan kahella eri tavalla. Niin niitten ensimmäinen ajatus oli, että niistä voi tulla eri vastaus.”*

Opettajasta tuleekin valmentaja (7+0) Puheenvuorot siitä, miten menetelmän käyttö muuttaa opettajan roolia ikään kuin valmentajaksi.	Alakoulun opettaja A: *”…Että tuo onkin mun puolella tuo ope. Eikä niin että se yrittää mulle täältä jotakin syöttää näin…Se on mun puolella, se yrittää keksiä mulle sopivia keinoja!”*
Opitaan useita tapoja nähdä asioita (3+2) Puheenvuorot siitä, mitä menetelmän käyttö voi opettaa muidenkin kuin matematiikan asioiden näkemisestä useammasta näkökulmasta.	Alakoulun opettaja A: *”Opetetaan jo näillä matikan tunneilla lapsille, että on jo - monia vaihtoehtoja [elämässä yleensä]. Aina löytyy uus vaihtoehto.”*
Keskustelu lisääntyy (3+0) Puheenvuorot siitä, miten menetelmän käyttö hyödyttää oppilaiden keskustelutaitoja**.**	Yläkoulun opettaja D: *”…sitten kun siinä oppilaiden kans yhm, pystytään aika mukavasti miettimään. Ja sitten kun on kysynyt niiltä sen jäläkeen, että mitä etuja teidän mielestä on siinä tapa ykkösessä ja tapa kakkosessa. Ne kertoo sitten omia ajatuksiaan siitä. Ja sitten siinä tapa kakkosessa, että mitä haittoja ja näin…”*
Kertaaminen (0+2) Puheenvuorot siitä, että menetelmää voidaan hyödyntää kertaamisen tukena.	Opettajaopiskelija B: *”Yy. No taulukosta sen verran [ks. liite, tehtävä 7]. Että jos jostain syystä haluaa laittaa oppilaat muistelemaan, mitä se kertolasku olikaan, niin se ois yks syy, miksi haluaa käyttää tuota taulukkoa.”*

Opettajat ja opettajaopiskelijat näkivät menetelmän käyttämisellä olevan paljon potentiaalia, opettajat opettajaopiskelijoita monipuolisemmin. Hyötyinä voisivat olla, että ajattelu kehittyy, voidaan keskustella matematiikasta, voidaan tarkistaa vastaukset, oppilaalle voidaan valita juuri hänelle sopiva ratkaisutapa, opitaan matematiikasta laajemminkin ja opitaan tapoja nähdä asioita eri tavoilla muissakin yhteyksissä. Menetelmästä on siis hyötyä sekä ajattelulle että matematiikan ymmärtämiselle, ja se on mahdollisuus opetuskulttuurin muutokseen.

Alakategoriassa ”Jotain liikahtaa päässä eri tavalla” opettajat ja opettajaopiskelijat näkivät, että menetelmä voi kehittää ajattelua, antaa oppilaille mahdollisuuden kertoa ratkaisutavoistaan ja auttaa oppimaan jäsentämään ajatuksia. Lisäksi arviointikyky ja luovuus kehittyvät, kun oppilas oppii, ettei kaikki mene aina samalla tavalla. Vertailu saattaa olla "tikapuu siihen, mitä tapahtuu" eli sen kautta voi oppia jotain toisesta ratkaisutavasta. Lisäksi oppilaille saattaa tulla väärinkäsityksiä, jos he eivät käytä kahta ratkaisutapaa rinnakkain. He voivat vetää vääriä johtopäätöksiä siitä, miksi jokin tapa sopii johonkin tehtävään ja ettei se sopisikaan toiseen tilanteeseen.

Alakategoriassa ”Opitaan matematiikasta yleensä” puheenvuorot viittasivat siihen, että oppilaat voivat opettajien menetelmän myötä kasvaa näkemään, millaista matematiikka oikeasti on sekä oppivat etsimään erilaisia ratkaisutapoja, jäsentämään asioita ja arvioimaan paremmin. Oppilaat myös voisivat nähdä, ettei opettaja vain yritä siirtää asioita hänelle, vaan on oppilaan puolella.

Alakategoriassa ”Parhaan menetelmän löytäminen” etsittiin oppilaalle sopivinta, nopeinta tai tehokkainta menetelmää, jonka sekä oppilas että opettaja voivat osallistujien mukaan oppia menetelmän myötä löytämään. Tämä sivuuttaa vertailumenetelmän ajatusta siinä mielessä, että siinä pyritään valitsemaan tehokkain ratkaisutapa. Kuitenkin tulee huomioida, että matemaattinen joustavuus on etenkin kykyä itse liikkua eri ratkaisutapojen välillä eikä vain sitä, että opitaan erilaisia ratkaisutapoja vain, jotta osattaisiin laskea tehokkaimmalla tavalla tai opittaisiin ainoastaan tiettyyn tilanteeseen tehokkain tapa.

Menetelmää voidaan kategorian ”Vastauksen tarkistaminen” mukaan käyttää myös tarkistamiseen. Erään kokemuksen mukaan oppilaat eivät ensin hahmottaneet, että kahdella eri menetelmällä ylipäänsä pitäisi tulla sama vastaus. Lisäksi toisen menetelmän avulla voi opettajien mukaan tarkistaa, menikö vastaus oikein (tai ainakin silloin on jotain vialla, jos saadaan eri vastaukset).

Opettaja voisi menetelmän myötä tulla oppilaan ”koutsiksi” (alakategoria ”Opettajasta tuleekin valmentaja”), valmentajaksi, joka tietää asioista ja siitä, mikä oppilaalle on parhaaksi. Opettajan ja oppilaan vuorovaikutus muuttuu tällöin erilaiseksi, ja opettaja onkin oppilaan puolella etsimässä oppilaalle sopivia menetelmiä. Itse asiassa voidaan nähdä, että jotain laajemminkin muuttuu kulttuurissamme, kun oppiminen ei tapahdu ylhäältä alaspäin vaan opettajan ohjauksessa. Lapsen ja aikuisen vuorovaikutus muuttuu erilaiseksi. Oppilas voi kokea onnistumista saatuaan tehtäviä tehdyksi itse.

Alakategoriassa ”Opitaan useita tapoja nähdä asioita” opettajat näkivät, että useaa menetelmää käyttäen voi opettaa, että elämässä yleensäkin on vaihtoehtoja, ”myös mustavalkoiselle murrosikäiselle”, kuten eräs opettaja sanoi. Useat tavat avaavat auki mahdollisuuden keskustella ratkaisuista ja käyttää toista ratkaisutapaa apuna oppimisessa (alakategoria ”Keskustelu lisääntyy”). Opettajaopiskelijat eivät tätä näkökulmaa tuoneet esiin. Sen sijaan opiskelijat näkivät, että menetelmää voisi hyödyntää kertaamisen tukena, jos halutaan kerrata toinen ratkaisutapa (”Kertaaminen”). Opettajien aineistosta tätä puolta ei tullut ilmi.

Yhteenveto kategoriasta ” Menetelmän haasteita ja hyötyjä”

Opettajat ja opettajaopiskelijat näkivät menetelmässä sekä hyötyjä että haasteita. Menetelmä mahdollistaa matematiikan oppimisen uudella tavalla, vertaillen, keskustellen ja luovastikin. Opettaja toimii valmentajana, joka ei syötäkään yhtä valmista ratkaisukaavaa. Opettajaopiskelijat näkivät jossain määrin eri hyötyjä menetelmän käytölle, keskustelua he eivät maininneet ollenkaan. Menetelmän myötä on mahdollista kehittää laajasti erilaisia matematiikan taitoja ja omaa ymmärrystään. Haasteena nähtiin, ettei menetelmä välttämättä sovi ainakaan heikoille oppilaille, koska oppilaat eivät tällöin oppisi edes yhtä ratkaisutapaa kunnolla. Oppilaat eivät välttämättä ole edes ylipäänsä kiinnostuneita ratkaisemaan tehtäviä toisella tavalla, vaan ovat tottuneet ajattelemaan, että vastaus on matematiikan opiskelun päämäärä.

3.3. Erot opettajien ja opettajaopiskelijoiden välillä

Opettajien ja opettajaopiskelijoiden näkemyksissä oli eroja. Jotkut kommentit nousivat esiin ainoastaan opettajilta. Vain opettajat toivat esiin, että menetelmä soveltuisi pelkästään lahjakkaille oppilaille tai että heikoimmin matematiikassa pärjänneille oppilaille tulisi opettaa vain yksi ratkaisutapa. Opettajien puheenvuoroissa sanottiin myös, että kaikilla oppilailla ei ole valmiuksia ottaa menetelmää käyttöön eikä se kehitä ymmärrystä. Oppilaat voisivat myös opettajien mukaan siirtyä tekemään sijaistoimintoja, jos käytetään kahta eri ratkaisutapaa. Opettajat myös näkivät, että menetelmän käytöstä voisi aiheutua ylimääräistä vaivaa. Toisaalta pelkästään opettajat toivat esiin hyvinä puolina, että opettajasta tulisikin valmentaja ja keskustelu lisääntyisi.

Osa kommenteista nousi vain opettajaopiskelijoilta. Osa opettajaopiskelijoista sanoi, että menetelmästä voisi olla haittaa omalle proseduraaliselle osaamiselle tai toisen menetelmän käyttö olisi turhaa tai että eivät osaa arvioida menetelmän hyötyä. Opettajaopiskelijat myös pelkäsivät, ettei toista ratkaisutapaa ymmärrä, mitä taas opettajat eivät tuoneet esiin. Uutena näkökulmana eräs opettajaopiskelija toi esiin, että se ettei käytä kahta eri menetelmää, voisi sekoittaa oppilaita. Oppilaat voisivat tällöin päätyä ajatukseen, että tietyssä tilanteessa tulee aina käyttää tiettyä ratkaisutapaa. Useamman menetelmän myötä myös oppilaat voivat löytää nopeamman menetelmän. Tässä opettajaopiskelijat toivat esiin näkökulmaa joustavuuden kehittämisestä, mitä opettajat eivät tehneet. Opettajaopiskelijat myös näkivät, että menetelmää voisi käyttää kertaamiseen.

Opettajien ja opettajaopiskelijoiden erilaiset näkemykset täydentävät kuvaa vertailumenetelmän käytön mahdollisuuksista ja haasteista. Opettajien näkemykset siitä, että keskustelu lisääntyisi ja opettajan rooli muuttuisi, erosivat selvästi opiskelijoiden näkökulmista. Opettajat pystyivät peilaamaan paremmin vaikutuksia käytännön luokkahuonetilanteisiin, mutta opettajaopiskelijat näkivät opetuskokemuksensa vähäisyydestä huolimatta uusia näkökulmia.

3.4. Tutkimuksen luotettavuus

Kyseessä oli laadullinen tutkimus, jossa pyrittiin löytämään vertailumenetelmän käyttöön liittyvien käsitysten variaatiota. Aineisto ei kerro, mitä opettajat keskimäärin ajattelevat menetelmästä, mutta se ei tutkimuksen tarkoituksena olekaan.

Kysymystä fenomenografisen tutkimuksen tutkimusprosessin luotettavuudesta Marton (1988) vertaa kysymykseen, löytäisikö kaksi kasvitieteilijää samalta saarelta samat kasvit ja lajit, mikä ei hänen mukaansa ole relevantti kysymys. Tutkijan tietoisuus omista käsityksistään on silti tärkeä (Huusko & Paloniemi, 2006). Nyt tutkija oli itsekin aineistonkeruuhetkellä tutustumassa menetelmään. Tutkimusta tehdessään tutkija tarkasteli aineistoa mahdollisimman objektiivisesti.

Aineistonkeruussa tulisi fenomenografiassa pyrkiä avoimeen kysymyksenasetteluun (Huusko & Paloniemi, 2006), joka nyt toteutui osittain kahden itsereflektiokysymyksen kautta. Kysymykset olisivat voineet olla vieläkin avoimempia ja haastateltavia pyytää esimerkiksi suoraan reflektoimaan menetelmää. Lisäksi tutkimuksen opettajat olivat erityisen motivoituneita, sillä he osallistuivat vapaaehtoiseen täydennyskoulutukseen. Opiskelijoiden keskustelu ei ollut yhtä monipuolista, vaan heitä täytyi välillä käydä muistuttamassa tehtävänannosta, jotta he eivät jutelleet pelkästään esimerkiksi omista opiskelukokemuksistaan.

Lukija voi arvioida tutkimuksen luotettavuutta tarkan prosessikuvauksen ja annettujen esimerkkien kautta (Syrjälä ym., 1994). Nyt kuvaus ja esimerkit on annettu seikkaperäisesti. Puheenvuorojen käyttäminen segmenttinä oli jossain määrin ongelmallista, sillä ne olivat pitkiä ja saattoivat mahdollisesti sisältää useampiakin näkökulmia. Fenomenografisen tutkimuksen tulkinnan tulisi kohdistua ”ajatuksellisiin kokonaisuuksiin” (Huusko & Paloniemi, 2006), mihin tässä päästiin aineiston sallimissa rajoissa. Kategorioiden välisiä eroja ei nyt kovin pitkälti päästy tutkimaan.

4 Pohdinta ja johtopäätökset

Opettajat ja opettajaopiskelijat kokeilivat vertailumenetelmää tekemällä aina yhden matematiikan tehtävän kahdella eri annetulla ratkaisutavalla ja keskustelemalla eri ratkaisutavoista. Tämän jälkeen he pohtivat menetelmää yhdessä itsereflektiokysymysten avulla. Tutkimusprosessissa noudatettiin tieteellisen tutkimuksen lähtökohtia, aineisto oli aitoa opettajien ja opiskelijoiden keskustelua, ja siitä löydettiin erilaisia käsityksiä. Fenomenografinen tutkimusstrategia soveltui tutkimukseen hyvin.

Tutkimuksen opettajat kokivat vertailumenetelmän vaikuttavan heidän omaan käsitteelliseen osaamiseensa positiivisesti, kun puolestaan opettajaopiskelijat kokivat oppivansa laskemaan paremmin. Opettajien ajatukset vertailumenetelmästä suhteessa omaan matematiikan oppimiseensa painottuvat hyötyihin. Tutkittavat näkivät menetelmän edistävän omaa matematiikan tehtävien, käsitteiden ja prosessien ymmärtämistä sekä tukevan ajattelun kehittymistä. Opettajaopiskelijoilla oli enemmän epäilyksiä menetelmän hyödyistä omalle oppimiselleen. Osallistujat eivät pohtineet oman joustavuutensa kehittymistä.

Opettajat ja opettajaopiskelijat näkivät menetelmässä erilaisia hyötyjä ja haasteita (Taulukko 1). Tutkittavien mukaan oppilaat voisivat oppia useita tapoja nähdä asioita, oppilaat voisivat löytää itselle sopivan ratkaisumenetelmän, opettajasta tulisi menetelmän myötä valmentaja ja keskustelu lisääntyisi. Menetelmän käyttö voisi myös avartaa käsitystä matematiikasta paljastaen sen todellisen luonteen, kuten tutkittavien sanoman voisi tulkita. Toisaalta opettajat ja opettajaopiskelijat olivat huolissaan muun muassa siitä, ettei menetelmä kiinnostaisi oppilaita, ettei oppilailla olisi valmiuksia siihen tai menetelmä olisi liian vaativa opettajalle. Jotkut opettajat olivat huolissaan, että menetelmä voisi sekoittaa heikkoja oppilaita, mutta Lynch ja Star (2014a) ovat selvittäneet laadullisessa tutkimuksessaan, että myös heikosti matematiikassa menestyneet oppilaat näkivät useita hyötyjä eri ratkaisutapojen käytössä ja se päinvastoin vähensi heidän hämmennystään.

Myös aiemmissa tutkimuksissa opettajat ovat nähneet menetelmässä useita hyötyjä ja haasteita (Yakes & Star, 2011; Lynch & Star, 2014b), joskin näissä tutkimuksissa opettajat kokeilivat useiden ratkaisutapojen käyttöä omissa luokissaan, kun tämän tutkimuksen opettajat pohtivat menetelmää ilman omaa opetuskokeilua. Tämän tutkimuksen tulokset tukevat aiempia tutkimuksia, sillä menetelmästä voisi opettajien mielestä olla laajaa hyötyä, mutta toisaalta oppilaita ei välttämättä kiinnosta useiden ratkaisutapojen käyttö. Opettajaopiskelijat toivat esiin opettajiin ja aiempaan tutkimukseen verrattuna erilaisena hyötynä menetelmän käytön kertaamiseen. Tutkittavat myös näkivät pienemmän määrän esteitä menetelmän käyttöönotolle kuin useiden ratkaisutapojen käyttöä koskevan tutkimuksen (Lynch & Star, 2014b) opettajat. Aiempaa tutkimusta enemmän painottui menetelmän hyödyn pohtiminen, sillä osallistujat painottivat yleisemminkin matematiikassa opittavia taitoja. Myös luovuus nousi esiin uutena komponenttina.

Tämän tutkimuksen osallistujat eivät juuri pohtineet vertailukeskustelua, jonka Yakesin ja Starin (2011) tutkimuksen opettajat näkivät menetelmän haasteeksi. Tähän voisin ajatella yhtenä syynä olevan, että opettajilla itselläänkin vertailukeskustelu jäi melko vähäiseksi eikä heitä kenties ohjattu siihen riittävästi, jolloin he eivät täysin hahmottaneet keskustelun olevan oleellinen osa menetelmää. Opettajaopiskelijat eivät pohtineet tätä näkökulmaa lainkaan. Yakesin ja Starin (2011) tutkimuksessa esiin tullut opettajien taipumus valita itse paras opetettava ratkaisutapa näkyi myös tässä tutkimusaineistossa; sanottiin jopa, että opettajanoppaassa kehotetaan tähän. Yhteen menetelmään keskittymisen haasteet mainittiin kuten aiemmassa tutkimuksessakin. Tämä tutkimuksen tulokset noudattelevat jossain määrin aiemman tutkimuksen opettajien esiin tuomia seikkoja. Kuitenkin vertailukeskustelua ja menetelmän kolmatta vaihetta, uusien lähestymistapojen etsimistä, pohdittiin hyvin vähän.

Useiden ratkaisutapojen ja niiden vertailun käyttämisestä on saatu lupaavia oppimistuloksia Yhdysvalloissa (esim. Star & Rittle-Johnson, 2009). Nyt tuloksissa painottui, että matematiikka on muutakin kuin laskemisen mekaanista oppimista, sillä tutkittavien puheenvuorojen mukaan menetelmän myötä voitaisiin oppia useita erilaisia asioita matematiikkaan liittyen. Opettajien kannattaisi tämän tutkimusten tulosten pohjalta kokeilla vertailumenetelmän käyttöä, sillä sen avulla voi mahdollisesti saavuttaa useita hyötyjä. Vertailumenetelmän mahdollistamat päämäärät ovat paitsi tärkeitä arkielämätaitoja, myös oleellisia opiskelu- ja työelämätaitoja. Menetelmän myötä opittavat taidot, kuten asioiden eri näkökulmista tarkastelu sekä vaihtoehtojen punnitseminen ja niistä keskustelu ovat samansuuntaisia perusopetuksen uuden opetussuunnitelman matematiikan osaamistavoitteiden kanssa: ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia.” ja ”Oppilaita ohjataan esittämään ratkaisujaan ja keskustelemaan niistä.” (Opetushallitus, 2014).

Tämä tutkimus jättää auki, millaisia valmiuksia opettajilla olisi käytännössä esimerkiksi ohjata vertailukeskustelua ja olisivatko he valmiita käyttämään menetelmää opetuksessa. Turkkilaisopettajat esimerkiksi eivät olleet avoimia usean ratkaisutavan käytölle eikä heillä ollut valmiuksia siihen (Bingobal, 2011). Tässä tutkimuksessa nähtävissä kuitenkin on, että opettajat tunnistivat menetelmässä monia hyötyjä matematiikan opetukseen ja laajemminkin opetuskulttuurin muutokseen. Opetus voisi esimerkiksi muuttua enemmän käsitteellistä osaamista painottavaksi ja oppilaskeskeisemmäksi. Opettajaopiskelijat puolestaan eivät keskustelleet menetelmästä yhtä monipuolisesti kuin opettajat, mikä on luonnollista opetuskokemuksen puuttuessa.

Jatkossa tulisi tutkia, millaisia opettajien käsitykset menetelmästä ovat sitten, kun sitä käytetään opetustilanteissa ja eroavatko ne tässä tutkimuksessa esiin tulleista käsityksistä. Tulevaisuudessa voisi esimerkiksi selvittää, miten opettajat käyttävät vertailumenetelmää ja millaisia keskusteluja luokkahuoneessa syntyy.

Kiitokset

Kiitokset tutkimuksen rahoituksesta Jenny ja Antti Wihurin rahastolle ja OKKA-säätiölle.

Lähteet

Bingolbal, E. (2011). Multiple Solutions to Problems in Mathematics Teaching: Do Teachers Really Value Them? *Australian Journal of Teacher Education*, *36*(1). https://doi.org/10.14221/ajte.2011v36n1.2

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41(5)*, 605. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

Guberman, R. & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers’ views by employing multiple-solutions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 33–56. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *41*, 535–540.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 65–97. New York: Simon & Schuster Macmillan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (Toim.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, 1–27. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Huusko, M., & Paloniemi, S. (2006). Fenomenografia laadullisena tutkimussuuntauksena kasvatustieteissä. *Kasvatus: Suomen kasvatustieteellinen aikakauskirja 37 (2006): 2*.

JYR. (2018). Joustava yhtälönratkaisu – LUMA SUOMI –kehittämishankkeen esittely. Oulu. http://ouluma.fi/joustava-yhtalonratkaisu/

Lynch, K., & Star, J. R. (2014a). Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in Algebra I: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 6–18. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.1.0006

Lynch, K. & Star, J. R. (2014b). Teachers' Views About Multiple Strategies in Middle and High School Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 16(2)*, 85–108. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.889501

Marton, F. (1988). Phenomenography: A Research Approach to Investigating Different Understandings of Reality. Teoksessa R.R. Sherman & R.B. Webb. *Qualitive Research in Education: Focus and Methods*, 141–161. London, New York, Philadelphia: The Falmer Press.

Metsämuuronen, J. (2006). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä*. Vaajakoski: Gummerus Kirjapaino Oy.

Opetushallitus. (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. *Opetushallitus, määräykset ja ohjeet 2014: 96*. Tampere, Juvenes Print – Suomen yliopistopaino Oy, Tampere.

Palkki, R. (2016). Virheellinen esimerkki matematiikan luokkahuonekeskustelussa. In Sifverberg, H. & Hästö, P. ((Eds.). *Proceedings of Annual Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association 2015*. Turku, Finland.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 561. https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.561

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning To Think Mathematically : Sense-Makingin Mathematics. In D. Grouws (Ed.). *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334–370. New York: MacMillan.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental psychology*, *47*(6), 1525. https://doi.org/10.1037/a0024997

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 404–411. https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2

Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B., & Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, *41*, 198–208. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.03.001

Star, J. R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K., & Gogolen, C. (2015). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, *40*, 41-54. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2014.05.005

Star, J. R. & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, *18*, 565–579. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.018

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology, 102(4)*, 408–426. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.11.004

Syrjälä, Ahonen, Syrjänen ja Saari (1994). *Laadullisen tutkimuksen työtapoja.* West-Point Oy: Rauma.

Valtonen, A. (2005). Ryhmähaastattelut - millainen metodi? Teoksessa J. Ruusuvuori. *Haastattelu: tutkimus, tilanteet ja vuorovaikutus,* 223–241. Tampere: Vastapaino.

Yakes, C. & Star, J. R. (2011). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 175-191. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9131-2

Liite 1. Tutkimuksessa käytetyt tehtävät (alkuperäiset tehtävät: Yakes & Star, 2011)

Tehtävä 1, yhtälöryhmät
Ratkaise seuraavat yhtälöryhmät sijoituksella (S1) ja lineaarikombinaatiolla (S2):

(T1) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$(T2) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

Tehtävä 2, lineaariset epäyhtälöt
Ratkaise seuraavat epäyhtälöt siirtämällä muuttuja oikealle (S1) ja vasemmalle (S2) puolelle:
(T1) $3 - 5x > 10$(T2) $x \geq 3x - 2$

Tehtävä 3, verranto
Ratkaise x ristiin kertomalla (S1) ja kertomalla kumpikin puoli yhdellä luvulla (S2):

(T1) $\frac{2}{x} = \frac{16}{5}$(T2) $\frac{x}{6} = \frac{5}{9}$

Tehtävä 4, verranto
Ratkaise x ristiin kertomalla (S1) ja vertailemalla osoittajan ja nimittäjän osamääriä (S2):

(T1) $\frac{x}{14} = \frac{16}{8}$(T2) $\frac{x}{14} = \frac{3}{8}$

Tehtävä 6, murtolukujen sieventäminen
Sievennä lauseke jakamalla osoittaja ja nimittäjä yhteisillä tekijöillä (S1) ja kirjoittamalla osoittajan ja nimittäjän alkulukufaktorisaatio (S2):

(T1) $\frac{78}{126}$(T2) $\frac{2a^2b}{6ab^3}$

Tehtävä 7, pienin yhteinen jaettava
Etsi pienin yhteinen jaettava kirjoittamalla taulukko monikerroista (S1) ja kirjoittamalla alkulukufaktorisaatio (S2):

(T1) $\{18,30\}$(T2) $\{4x^2, x^2 + x\}$