

# Bagdad - matematiikkaa täältä ikuisuuteen matematiikkanäyttely

**Sirkka-Liisa Eriksson**  
Tampereen teknillinen yliopisto

**Johanna Vainio**  
Tampereen teknillinen yliopisto

**Tiivistelmä** Bagdad - matematiikkaa täältä ikuisuuteen on Ruotsalaisen Navet-tiedekeskuksen tuottama näyttely, joka pidettiin 11.4. – 31.5.2013 Tampereen museokeskus Vapriikissa. Bagdad näyttely oli kiehtova matka matematiikan historiaan muutamine historian matemaatikoiden johdattamana. Al-Khwarizmi, Hypatia, Sonja Kovalevskaja, Arkhimedes, Brahmagupta ja muut matematiikan mestarit johdattivat yleisön matematiikan maailmaan draaman, pelien ja erilaisten pähkinöiden avulla. Jokainen näyttelykerta oli puolentoista tunnin mittainen ja piti sisällään johdannon, ryhmissä tehtävän ongelman, itsenäistä puuhastelua ja yhdessä tehtävän ongelman. Johdanto oli draamamuotoinen ja johdatteli yleisön matematiikan ongelmien pariin. Johdannon jälkeen ryhmissä tehtiin jokin matematiikan pulma tai ongelma. Tämän jälkeen yleisöllä oli mahdollisuus tutkia teltaa ja tutustua teltaan asetettuihin peleihin ja pulmiin itsenäisesti. Näyttelykerran lopussa yleisölle esitettiin yhteinen ongelma tai pulma ratkaistavaksi ja mietittäväksi.

## 1 Johdanto

Bagdad – matematiikkaa täältä ikuisuuteen on Ruotsalaisen Navet-tiedekeskuksen tuottama näyttely, joka pidettiin 11.4. – 31.5.2013 Tampereen museokeskus Vapriikissa. Navetissa matematiikka on kaunista, iloista, miellyttävää, elämyksiä, historiaa, systemaattista, luovaa, analyttistä ja kaikkien aistien ja erilaisten opetusmenetelmien käyttöä (Navet science center, 2010). Bagdad-näyttelyn tarkoituksena oli saada oppilaat innostumaan ja oivaltamaan uusia puolia matematiikasta sekä osoittaa, että matematiikkaa on kaikkialla ympärillämme. Työpajassa opittiin muun muassa geometriaa, symmetriaa ja todennäköisyyksiä. Matematiikka on monelle vain laskentoa ja numeroita. Näyttelyn avulla kävijöille tarjottiin kokemus siitä, että matematiikka on paljon muuta kuin vain laskentoa ja lukuja.

Näyttely oli avoinna yleisölle kahtena viikonloppuna. Muuten näyttely oli avoinna tiistaista perjantaihin koululaisryhmille ennakkotilauksesta. Jokainen näyttelykerta oli puolentoista tunnin mittainen ja soveltui kaikenikäisille ja -tasoisille kävijöille. Matematiikkanäyttely oli ilmainen tamperelaisille koululaisille. Myös pirkanmaalaiset koulut Tampereen ulkopuolelta pääsivät huhtikuun loppuun asti ilmaiseksi näyttelyyn (Vapriikki, 2013). Lukiolaisryhmiä näyttelyyn ilmoittautui vain yksi, mutta peruskoululaisia kävi jokaisesta luokka-asteesta useampia.

Näyttely tuli kokonaisuudessaan Ruotsista Navet-tiedekeskukselta. Näyttelyn mukana tuli myös muutamia kirjoja, joista on kerätty tehtäviä ja pelejä näyttelyyn. Kirjat ovat seuraavat: Kvadrater, hieroglyfer och smarta kort, mera matte med mening, Kristin Dahl, Alfabet 2000; Matte med mening, tänka tal och söka mönster, Kristin Dahl, Sven

Nordqvist, Alfabet 1999; Räkna med mig, matte gåtor för hela familjen, Kristin Dahl, Alfabet 2009; Nämnaren Tema, Familjematematik, Göteborg yliopisto, 2004; Nämnaren Tema, Uppslagsboken, Göteborg yliopisto 2002.

Tämän tekstin tarkoituksena on antaa lukijalle kuva siitä, miten Tukholmasta Suomeen tuotu Navetin matematiikkanäyttely otettiin vastaan Tampereella museokeskus Vapriikissa sekä kertoa ja jakaa tietoa itse matematiikkanäyttelyn toteutuksesta. Teksti perustuu kokemuksiini näyttelynohjaajana ja materiaali työhöni on kerätty itse näyttelystä ja näyttelyn materiaalista, jollei toisin ole mainittu.

Matematiikkanäyttely oli hieno kokemus, niin näyttelyssä käyneille monille oppilaille kuin minulle ohjaajana. Suuri kiitos vielä kaikille yhteistyökumppaneille, jotka mahdollistivat näyttelyn toteutuksen myös Tampereella. Matematiikkanäyttelyssä mukana yhteistyössä toimivat seuraavat tahot (Vapriikki, 2013):

- Lumate
- Vapriikki
- Tampereen kauppakamari
- Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö
- Navet Science Center
- Tampereen teknillinen seura
- Suomalais-ruotsalainen kulttuurirahasto
- Tampereen kaupunki
- Tampereen yliopistojen matematiikkakeskus

## 2 Bagdad-näyttelyn ohjaajakoulutus

Matematiikkanäyttelyyn koulutettiin matematiikan ja kasvatustieteiden opiskelijoita, jotka toimivat ohjaajina koko näyttelyn ajan. Ohjaajat esittivät draamaa ja olivat pukeutuneet matematiikan mestareiksi. Ohjaajien tehtävänä oli opastaa koululaisia eri työpisteillä ja auttaa heitä eri pelissä ja vempeloissa.

Ohjaajat saivat koulutuksen Ruotsista Navet-tiedekeskukselta tulleelta Riitta Carlströmilta. Riitta Carlström kertoi ja opasti ohjaajia kahden päivän ajan näyttelyn eri pelien ja pisteiden toimintaan. Hän ohjeisti myös muuhun näyttelyn toimintaan ja kertoi, mikä tarkoitus näyttelyllä on ja miten se on saanut alkunsa Ruotsissa vuonna 2000 Navetin johtajan, Lotta Johanssonin, toimesta. Johansson sai tuolloin tehtäväkseen löytää jonkin innostavan lähtökohdan matematiikan näyttelylle. Ajatuksena oli, että näyttely sopisi niin opettajille, oppilaille, aikuisille kuin lapsille. Tällöin historiallinen lähtökohta sai alkunsa ja vuosien varrella koko Navetin pedagogiryhmä on ollut näyttelyn kehittämisessä mukana. Bagdad-näyttelyn ulkoasu on Navetin somistajan Helene Berntssonin käsialaa.

Kaikki tieto ja ohjaus, minkä ohjaajat saivat tuli esille näiden kahden koulutuspäivän aikana. Museokeskus Vapriikki ohjeisti myös ohjaajia siitä, miten museossa toimitaan ja kertoi käytännön asioista. Kahden päivän ohjaajakoulutuksen ensimmäisenä päivänä

käytiin läpi pelejä ja toimintapisteitä, jotta eri pisteet, pulmat ja pelit tulisivat tutuiksi meille ohjaajille ja osaisimme hyödyntää ja käyttää niitä. Koulutuksen seuraavana päivänä tutustuimme vielä joihinkin tehtäviin ja peleihin. Tällöin kuitenkin keskityimme tutustumaan eri matematiikan mestareihin ja näyttelyn draamaosuuteen. Jokainen näyttelykerta alkoi pienellä noin kymmenen minuutin johdannolla, jossa esiintyi yleensä kolme matemaatikkoa.

Koulutus antoi ohjaajille hyvät valmiudet ja lähtökohdat itse näyttelyyn ja siinä ohjaajana toimimiseen. Ohjaajien ei tarvinnut muistaa kaikkea koulutuksessa läpikäytyä tietoa, sillä näyttely oli rakennettu siten, että kaikkiin pisteisiin ja peleihin oli kirjoitettu suomenkieliset ohjeet, joista ohjaajat ja myös oppilaat saattoivat lukea, mistä kyseisessä pelissä tai muussa toiminnassa oli kyse.

### 3 Näyttelyn kolme eri johdantoa

Näyttelyn kolme erilaista johdantoa johdattivat yleisön matematiikan matkalle historialliseen Bagdadiin, joka on näyttelyn päähenkilön al-Khwarizmin kotipaikka. Näyttely koostui museokeskukseen rakennetusta teltasta. Teltta oli sisustettu Bagdadilaiseen tyyliin ja yleisölle jo itse ympäristö oli kiehtova paikka tutkia ja pohtia matematiikkaa.



**Kuva 1** Teltta ja näyttelyn kaksi matemaatikkoa: vasemmalla puolella on Saara Lahtinen pukeutuneena matemaatikoksi Sonja Kovalevskaja ja oikealla Eeva Jäntti al-Khwarizmina.

Kolme erilaista johdantoa on tarkoitettu eri ikäluokille ja jokaisen näyttelykerran alussa ohjaajat valitsivat, minkä johdannon he yleisölle esittäisivät. Toivottaessaan tervetulleeksi yleisön ja johdattaessaan heidät historialliseen Bagdadiin päähenkilö matemaatikko al-Khwarizmi kertoo heille, kuinka hän on rakentanut paikalle teltan, jossa kaikki on matematiikkaa. Näyttelyn lopussa al-Khwarizmi kysyi oppilailta olivatko he löytäneet

teltasta, jotakin, mikä ei liittynyt matematiikkaan. Aina oppilaat olivat löytäneet jotakin sellaista, jonka he eivät uskoneet liittyvän matematiikkaan. Al-Khwarizmi oli kuitenkin kokenut matemaatikko ja tiesi, että matematiikkaa oli kaikkialla ja osasi vastata oppilaiden esittämiin epäilyksiin esimerkiksi siitä, pitävätkö teltan tuolit sisällään matematiikkaa.

Jokaisella kerralla johdantojen jälkeen ohjaajat jakoivat oppilaat pienempiin ryhmiin ja aloittivat työskentelyn pienemmissä ryhmissä ohjatusti ohjaajien valitseman ongelman ja pelin parissa. Tämän jälkeen oppilaat saivat itsenäisesti tutkia ja kokeilla, mitä kaikkea teltasta löytyi. Jokaisen näyttelykerran lopussa ohjaajat useimmiten kokosivat oppilaat yhteen ja tekivät jonkun yhteisen pulman tai tehtävän heille.

### 3.1 Mittausjohdanto

Mittausjohdannossa, joka on tarkoitettu nuorimmille eli noin ensimmäisen ja toisen luokan oppilaille, tutustutaan eri mittayksiköihin. Huomasimme kuitenkin, että harva näin nuori oppilas oli tutustunut kaikkiin johdannoissa käytettäviin mittayksiköihin, kuten desimetriin. Tämä johdanto sopikin paremmin hieman vanhemmille kuten kolmas- ja neljäsluokkalaisille. Ensimmäisen- ja toisen luokan oppilaat eivät aina ymmärtäneet mittayksiköiden tuomaa merkitystä.

Näyttelyn alkuun al-Khwarizmi hakee yleisön ja kertoo heille, että he saavat lähteä hänen mukaansa hänen kotikaupunkiinsa Bagdadiin. Hän aloittaa johdannon kertomalla nähneensä kamalaa painajaista ja sanoo haluavansa kertoa sen tunteakseen olonsa paremmaksi. Uni menee näin: ”Kävelin täällä Bagdadissa torilla kauniina aurinkoisena päivänä, kun sinne yhtäkkiä ilmestyi joukko eri aikoina eläneitä matemaatikkoja.” Esiin näyttämölle tulee Sonja Kovalevskaja, joka kysyy, saako hän mitata al-Khwarizmin pituuden. Sonja suorittaa mittauksen millimetreinä ja al-Khwarizmi tuntee itsensä erittäin pitkäksi ja on erittäin tyytyväinen mittaukseen. Seuraavaksi ilmestyy Hypatia, joka mittaa al-Khwarizmin desimetreinä (tai tuumina). Nyt al-Khwarizmi hämmästelee hieman tulosta. Tämän jälkeen paikalle saapuu Brahmagupta, joka mittaa al-Khwarizmin metreinä (tai kynnärinä). Nyt al-Khwarizmi alkaa huolestua toden teolla ja tuskailee, kuinka hän vain pienenee koko ajan. Häätäntyneenä al-Khwarizmi puhuu joutuneensa pienennyskaudelle ja alkaa juosta toria ympäri ihmetellen ja pohtien, mitä tehdä ennen kuin on niin pieni, ettei kukaan näe häntä.

Uni loppuu ja sisään al-Khwarizmin asuntoon astuu Hypatia. Hän tiedustelee, mitä on tapahtunut ja kuultuaan sen pyytää, josko hän saisi mitata al-Khwarizmin uudelleen. Nyt Hypatia ottaa esiin mittakepin, jossa on tällä kertaa mitat senttimetreinä. Nyt kaikki tuntuu taas paljon paremmalta. Al-Khwarizmi ja Hypatia keskustelevat oppilaiden kanssa, mistä johtuvat al-Khwarizmin eri pituudet. Johdannossa al-Khwarizmi mitattiin aina ilman, että ohjaajat ilmoittivat yksiköitä, jolloin lapset saivat pohtia mistä erot johtuivat. Useimmiten oppilaat keksivätkin, että kyseessä oli sama pituus koko ajan, mutta eri mittayksiköissä.

Tämän jälkeen Brahmagupta tulee paikalle juosten ja hengästyneenä ja kertoo hyvin uupuneena juosseensa paikalle aina Intiasta saakka vain saadakseen al-Khwarizmin kiinni.

Al-Khwarizmi on aiemmin käynyt Brahmaguptan luona kylässä, jolloin hän on saanut suuren määrän numeroita (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), jotka olivat täysin käyttökeltottomia al-Khwarizmin mielestä. Brahmagupta kertoo, että ne olivat käyttökeltottomia vain siksi, että al-Khwarizmi unohti nollan ja näyttää lappua, johon on piirretty nolla. Al-Khwarizmi ei tiedä, mikä on nolla ja matemaatikot kysyvätkin nyt, osaisivatko oppilaat kertoa, mikä on nolla. Oppilaat olivat todella hyviä selittämään, mikä on nolla. Monesti vastauksena oli, että nolla ei ole mitään, se on tyhjä tai, että sen avulla numeroista saadaan suurempia.

### 3.2 Karkkipussit

Karkkipussit johdanto on tarkoitettu toiseksi vanhimmille eli noin kolmasluokkalaisista viidesluokkalaisiin. Esitimme tätä johdantoa kuitenkin myös nuoremmille mittaushohtannon tilalla ja johdanto toimi heilläkin todella hyvin. Johdanto alkaa, kun al-Khwarizmi toivottaa oppilaat tervetulleeksi ja kertoo heille, että Hypatian pitäisi saapua pian hänen luo kylään. Hän kertoo Hypatian olleen 300-luvulla elänyt nainen ja maailman ensimmäisiä naistieteilijöitä.

Tällöin Hypatia saapuu paikalle autonratti kädessä ja holtittomasti kaarrellen ja tööttäillen. Al-Khwarizmi kysyy ihmeissään, mikä Hypatialla on kädessä. Hypatia ei oikein tiedä ja kertoo löytäneensä sen jostain. Matemaatikot voivat kysyä yleisöltä osaisivatko he kertoa, mikä se on. Al-Khwarizmi ei pitänyt Hypatian sisääntulosta, sillä sellaisia ei ollut Hypatian elinaikana ja pyytääkin Hypatiaa tulemaan uudelleen sisään tällä kertaa hänen taustalleen sopivalla tavalla. Hypatia poistuu ja al-Khwarizmi kertoo tällä välin Hypatiasta. Hän kertoo Hypatian olevan kotoisin Aleksandriasta ja olevan erinomainen opettaja, jonka luennoille tuli suuri määrä oppilaita. Al-Khwarizmi kertoo myös, että Hypatian sanotaan olleen niin kaunis, että hän seisoj varjostimen takana oppilaita opettaessa.

Silloin Hypatia saapuu uudelleen paikalle ja tällä kertaa potkulaudalla. Hypatia tai al-Khwarizmi eivät kumpikaan tiedä kulkuvälineen nimitystä ja kysyvätkin oppilailta osaisivatko he kertoa. Kuullessaan oppilailta, mikä kulkuväline on, matemaatikot päätyvät siihen, että sellaisia kulkuvälineitä ei ollut Hypatian elinaikana. Jälleen Hypatia poistuu näyttämöltä potkulaudalla menen erittäin huterasti. Näyttämön sivussa tai takana, missä oppilaat eivät näe, Hypatia kaatuu rysähtäen (esimerkiksi kivet sangossa). Hetken kuluttua Hypatia tulee takaisin, mutta tällä kertaa hevosella ratsastaen. Nyt al-Khwarizmi on tyytyväinen, sillä hevosia oli Hypatian elinaikana.

Seuraavaksi sisään tulee al-Khwarizmin ja Hypatian matematiikkaystävä Sonja Kovaleskaja mukanaan kori, jossa on karkkipusseja. Sonja kertoo saaneensa korin Arkhimedekseltä täyttäessään äskettäin vuosia. Ja tunnetusti Arkhimedeksellä on omat periaatteensa ja kertoo karkkipusseihin liittyvän pulmapähkinän. Sonja kertoo oppilaille korissa olevan 21 pussia, joista seitsemän on täysinäistä, seitsemän puolillaan ja seitsemän tyhjää. Nyt heidän olisi jaettava pussit kolmen kesken siten, että kaikilla on yhtä paljon karkkia ja yhtä paljon pusseja ilman, että pusseja avataan.

Matemaatikot ratkaisevat ongelmaa yhdessä oppilaiden kanssa. Ongelman ratkaisu on seuraava: yksi matemaatikoista saa kolme täysinäistä pussia, yhden puolillaan olevan pussin ja kolme tyhjää pussia. Toiset kaksi matemaatikkoa saa kaksi täysinäistä pussia, kolme puolillaan olevaa pussia ja kaksi tyhjää pussia.

Al-Khwarizmi haluaa, että Sonja jää kylään ja kertoo heille hänen työstään. Sonja kertookin olevansa kotoisin Venäjältä, mutta saaneensa töitä Ruotsista, jossa hän toimii maan ensimmäisenä naispuolisena matematiikan professorina. Tällöin al-Khwarizmi sanoo, että työn täytyy olla erittäin hyväpalkkainen, mutta Sonja kertoo, että palkka ei ole lainkaan hyvä ja että miehet saavat paljon parempaa palkkaa.

Karkkipussit johdanto oli todella hyvä ja toimi monen ikäiselle. Käytimme tätä johdantoa nuorimmaisten kanssa ja myös aivan vanhinten. Vanhimmille oppilaille näytelmä oli hieman lapsellinen, mutta pulma tuntui kuitenkin sopivan haastavalta. Seuraavaksi esittelemäni johdanto saattoi olla joidenkin vanhempien ryhmien kohdalla liian hankala heti näyttelyn alkuun.

### 3.3 Sillan ylittäminen 17 minuutissa

Sillan ylittäminen 17 minuutissa -johdanto on tarkoitettu kaikkein vanhimmille noin kuudesluokkalaisista ylöspäin. Johdannossa al-Khwarizmi on kutsunut ystävänsä Brahmaguptan, Hypatian ja Sonja Kovalevskajan Bagdadiin ja haluaa näyttää matematiikkaystävilleen jotakin aivan erityistä – auringonlaskun autiomaassa. Päästäkseen aavikolle heidän täytyy kuitenkin ylittää syvä kanjoni kulkemalla pitkää riippusiltaa pitkin, joka kantaa vain kahta henkilöä kerralla.

Menomatalla heillä ei ole ongelmia, koska on valoisaa, vaikka matemaatikoilla onkin omat tapansa kulkea sillan yli. He myös mittaavat aikaa, kuinka kauan kullakin kestää kulkea sillan yli. Al-Khwarizmi on jo vanha tekijä ja häneltä menee aikaa vain yksi minuutti. Hypatialla menee sillan ylitykseen aikaa kaksi minuuttia, Sonjalla viisi minuuttia ja Brahmaguptalla kymmenen minuuttia. Nyt matemaatikot ihastelevat auringonlaskua ja kertovat samalla itsestään ja siitä, mitä he tekevät ja mistä heidät alalla tunnetaan.

Lopuksi al-Khwarizmi sanoo, että heidän on lähdettävä kotiin, sillä on jo pimeä. Onneksi al-Khwarizmilla on lamppu mukana, sillä siltaa ei voi ylittää ilman valoa. Ongelmana on, että lamppu palaa vain 17 minuutin ajan ja silta kestää vain kahden henkilön painon kerralla. Jonkun on myös aina tuotava lamppu takaisin sillan toiselle puolelle. Nyt kysytäänkin yleisöltä, missä järjestyksessä silta tulisi ylittää, jotta kaikki pääsisivät perille lampun valon avulla.

Oppilaat saavat ratkaista ongelman esittämällä ehdotuksia ja ohjaajat auttavat heitä tarpeen mukaan. Ongelman ratkaisu on seuraava:

- al-Khwarizmi ja Hypatia menevät ensin, aikaa kuluu tällöin kaksi minuuttia
- al-Khwarizmi palaa lampun kanssa takaisin, jolloin aikaa kuluu yksi minuutti
- Brahmagupta ja Sonja ylittävät sillan, jolloin aikaa kuluu kymmenen minuuttia

- Hypatia palaa lampun kanssa hakemaan al-Khwarizmin ja he ylittävät sillan, jolloin aikaa kuluu yhteensä neljä minuuttia
- kaikki ehtivät perille 17 minuutissa.

Kaikki johdannot annettiin ohjaajille kirjoitetussa muodossa, mutta tarkoitus ei ollut seurata käsikirjoituksia turhan tarkkaan, vaan käyttää käsikirjoituksia apuna ja tehdä johdannoista toimiva esitys. Esimerkiksi sillan ylittäminen 17 minuutissa -johdannossa saattoivat matemaatikot keksiä itselleen oman tapansa kulkea sillan yli. Esimerkiksi Brahmaguptalla saattoi olla korkeanpaikan kammo, Sonjan saattoi olla vaikea kulkea sillan yli hameensa takia ja niin edelleen. Joskus ohjaajia oli vain kaksi, jolloin johdantoja muokattiin kahdelle sopivaksi. Monesti tällöin al-Khwarizmilla oli vain yksi matematiikkaystävä, joka teki muidenkin matematiikkaystävien roolisuoritukset.

#### 4 Päähenkilöt

Kaikista näyttelyn matemaatikoista oli koottu erilliset tietoiskulaput seinälle, mistä oppilaat saattoivat lukea heistä. Seinälle oli koottu myös monista muista tunnetuista matemaatikoista tietoa. Jokaisessa johdannossa kuitenkin esiteltiin draamassa olleet matemaatikot ja kerrottiin jotakin heidän työstään ja siitä, mistä he ovat tunnettuja. Seuraavaksi esittelen johdannoissa esille tulleita matemaatikkoja tarkemmin.



Kuva 2 Tietoiskut päähenkilöistä

#### 4.1 Al-Khwarizmi n. 780-850

Näyttelyn päähenkilönä toimi persialainen Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, joka oli Bagdadissa toiminut tähtitieteilijä ja matemaatikko. Hän oli Musan poika (ibn) ja kotoisin Khwarizmista nykyisessä Uzbekistanissa Araljärven eteläpuolella. Al-Khwarizmi on kirjoittanut muun muassa kirjan hindujen numeroista. Kirjalla oli suuri merkitys hindujen numeroiden leviämiseen länsimaihin. Myös termi algoritmi on johdettu hänen nimestään ja hän on kehittänyt käsitteen algebra, joka on peräisin hänen oppikirjan nimestä Hisab al-jabr w'al-muqabala, joka tarkoittaa termien siirtoa ja yhtälöiden pelkistämistä. (O'Connar et al., 1999b; O'Connar et al., 1999c)

#### 4.2 Brahmagupta n. 598-670

Brahmagupta oli Intiassa noin vuonna 600 syntynyt matemaatikko ja tähtitieteilijä. Hän on saanut eniten mainetta nerokkaana matemaatikkona ja on tehnyt paljon keksintöjä tällä alueella. Hän oli muita edellä matemaattisessa ajattelussaan ja kehitti numerojärjestelmää monella tavoin. (O'Connar et al., 2000b)

”Kun lukuun lisätään nolla tai luvusta vähennetään nolla, luku säilyy muuttumattomana ja, kun luku kerrotaan nollalla saadaan nolla.” Tämän toteaman vuoksi Brahmagupta tunnetaan historiassa nollan ”keksijänä” (O'Connar et al., 2000b). Nollan keksiminen oli yksi merkittävimmistä keksinnöistä, sillä nollalla on tärkeä merkitys niin matematiikassa kuin myös arkielämässä. Brahmagupta saa usein kunnian nollan keksimisestä, vaikka nollaa käytettiin jo paljon aiemmin. Hän kuitenkin keksi ensimmäisenä nollan määritelmän ja määritteli lukuun nolla liittyvät matemaattiset lait. (O'Connar et al., 2000a)

Nollan määritelmän lisäksi hän keksi negatiiviset luvut. Brahmagupta kehitti myös kertolaskumenetelmän, joka muistuttaa paljon kouluissa nykyisin opetettavaa laskutapaa. Hän totesi myös, että jokaisella positiivisella luvulla on kaksi neliöjuurta, yksi positiivinen ja yksi negatiivinen. Hän oli myös taitava tähtitieteilijä ja onnistui muun muassa mittaamaan vuoden tarkan pituuden ainoastaan 24 minuutin virhemarginaalilla. (O'Connar et al., 2000b)

#### 4.3 Sofia Kovalevskaja 1850-1891

Sofia (Sonja) Kovalevskaja oli venäläinen matemaatikko, josta tuli Ruotsin ensimmäinen naispuolinen professori Tukholman yliopistossa. Hän kiinnostui varhain matematiikasta hänen enonsa kautta, joka arvosti suuresti matematiikkaa. Sofiaa kiehtoivat enon puheet matematiikasta ja myöhemmin hän huomasi yhtäläisyyksiä enonsa puheissa ja lastentarhan seinissä, jotka olivat päällystetty Ukrainalaisen matemaatikon Ostrogradskin luentomuistiinpanoilla. Naapuri, professori Tyrtov, huomasi Sofian olevan lahjakas matematiikassa ja yritti taivutella Sofian isän päästämään Sofian opiskelemaan matematiikkaa. Vasta usean vuoden kuluttua Sofian isä antoi Sofian ottaa yksityisopetusta. (O'Connar et al., 1996)

Päästäkseen pois kotoa ja voidakseen jatkaa opintojaan, Sofia solmi 18-vuotiaana nimellisavioliiton Vladimir Kovalevskyn kanssa. Vuonna 1869 Sofia muutti Heidelbergiin opiskellakseen matematiikkaa ja luonnontieteitä. Selvisi kuitenkin, että naiset eivät voineet



kirjoittautua yliopistoon, jonka vuoksi Sofia taivutteli yliopiston viranomaiset päästämään hänet luennoille epävirallisesti. (O'Connar et al., 1996)

24-vuotiaana Sofia oli kirjoittanut kolme kirjallista työtä, jotka matemaatikko ja Sofian opettaja Weierstrass katsoi olevan väitöskirjan arvoisia. Samana vuonna Sofiasta tuli myös Göttingen yliopiston tohtori. Hän halusi toimia akateemisella tasolla ja pääsi Tukholman yliopistoon yksityisdosentin virkaan, mikä merkitsi sitä, että hän toimi luennoitsijana ilman palkkaa. Vuonna 1886 Sonja sai Ranskan Bordin-palkinnon tehtyään matemaattisen työn kappaleen kiertoliikkeestä kiinteän pisteen ympärillä. Vuonna 1891 ollessaan matematiikan uransa huipulla, hän kuoli vilustuttuaan ja sairastuttuaan keuhkokuumeeseen. (O'Connar et al., 1996)

#### 4.4 Hypatia 370-415

Hypatia on varhaisimpia naispuolisia tutkijoita. Hän oli tiedemiehen tytär ja syntyi Aleksandriassa 370 jKr. Hypatia opiskeli isänsä opetuksessa ja ohjauksessa. Hän myös opetti matematiikkaa ja filosofiaa Aleksandrian yliopistossa. Hypatialla on ollut suuri vaikutus algebran ja yhtälöiden alueilla, mutta hän toimi myös astronomina ja tutki tähtien ja planeettojen sijaintia universumissa. Hypatia oli erittäin suosittu opettaja ja oppilaita tuli joukoittain luennoille ja keskustelutilaisuuksiin kuuntelemaan häntä. (O'Connar et al., 1999a; *The woman Astronomer*, 2005) Hypatian sanotaan myös olleen niin kaunis, että hän seisoi luentojensa aikana varjostimen takana, jotta hänen oppilaansa voisivat keskittyä kuulemaansa (BookRags, 2005-2006).

Hypatian tieteelliset tutkimukset ja avomielisyys erilaisia mielipiteitä ja jopa uskontoja kohtaan eivät olleet soveliaita Aleksandriassa, eivätkä kaupunkia tällöin hallinneet kristityt hyväksyneet niitä. Heidän mielestään matemaatikko piti tappaa ja näin tapahtuikin. Vuonna 415 jKr. fanaattiset kristityt tappoivat Hypatian. (O'Connar et al., 1999a)

### 5 Yhteiset pulmat

Jokaisen johdannon jälkeen ohjaajat esittivät jonkun pulman tai pelin oppilaille. Oppilaat jaettiin kahteen tai kolmeen ryhmään ja ryhmissä tehtiin jokin tehtävä. Tehtävä oli useimmiten jokin seuraavista: binääritaikatemppu, Möbiuksen nauha, meteoriitin iskeytyminen maahan, ajattele tuhatta tai laske laudalla tehtävä. Myös näyttelykerran lopussa oppilaat koottiin yhteen yhdeksi ryhmäksi ja esitettiin heille jokin pulma yhdessä ratkaistavaksi. Lopussa suosituimpia ongelmia olivat talonpojan ongelma, painavimman nallen punnitus tai binääritaikatemppu.

#### 5.1 Binääritaikatemppu

Binääritaikatemppu alkaa sillä, että ohjaajat tai ohjaaja kertoo oppilaille, kuinka hän osaa lukea heidän ajatuksiaan. Ei kuitenkaan ihan kaikkia ajatuksia, mutta numeroajatuksia. Aloitus voi olla hieman erilainen ohjaajasta riippuen, mutta tarkoitus on saada oppilaiden huomio ja saada heidät pohtimaan, miten taikatemppu tehdään.

Oppilaiden tehtävänä on miettiä heidän syntymäpäiväänsä, jotta ohjaajat voisivat ”lukea” heidän ajatuksiaan ja kertoa, mikä kyseinen päivä on, mitä he ajattelevat. Ohjaajilla on apunaan binäärinumeroihin perustuva lappu, jossa on numerot 1-31. Lapussa on jaoteltu numerot viiteen eri laatikkoon. Laatikoiden ensimmäiset numerot ovat 1, 2, 4, 8 ja 16. Näiden numeroiden avulla pystytään muodostamaan kaikki numerot yhdestä 31:een.

|             |             |  |  |  |  |  |  |
|-------------|-------------|--|--|--|--|--|--|
| 1 3 5 7     |             |  |  |  |  |  |  |
| 9 11 13 15  |             |  |  |  |  |  |  |
| 17 19 21 23 |             |  |  |  |  |  |  |
| 25 27 29 31 |             |  |  |  |  |  |  |
| 2 3 6 7     | 4 5 6 7     |  |  |  |  |  |  |
| 10 11 14 15 | 12 13 14 15 |  |  |  |  |  |  |
| 18 19 22 23 | 20 21 22 23 |  |  |  |  |  |  |
| 26 27 30 31 | 28 29 30 31 |  |  |  |  |  |  |
| 8 9 10 11   | 16 17 18 19 |  |  |  |  |  |  |
| 12 13 14 15 | 20 21 22 23 |  |  |  |  |  |  |
| 24 25 26 27 | 24 25 26 27 |  |  |  |  |  |  |
| 28 29 30 31 | 28 29 30 31 |  |  |  |  |  |  |

Kuva 3 Binääritaikatempu

Ohjaaja siis kysyy oppilaalta, löytyykö tästä laatikosta hänen ajattelemansa luku samalla osoittaen jotakin laatikkoa. Näin ohjaaja käy kaikki laatikot läpi saadakseen selville, missä laatikoissa luku esiintyy. Laskemalla näiden laatikoiden, joista numero löytyy, ensimmäiset numerot yhteen ohjaaja saa tietää oppilaan syntymäpäivän.

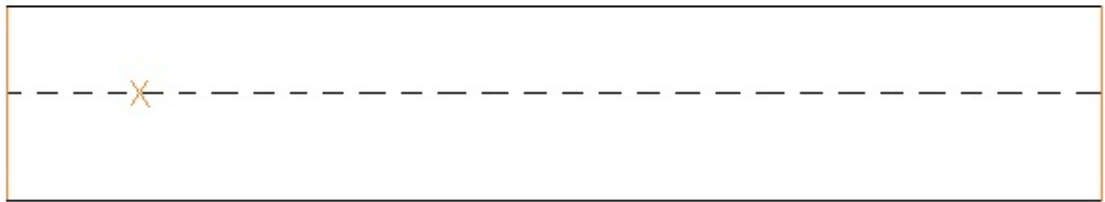
Kun kysyimme oppilailta, osaisivatko he kertoa, miten tempu tehdään, niin moni vastasi, että ohjaajat olivat opetelleet ulkoa lapussa näkyvät numerot. Kerroimme, että voisimme tehdä saman tempun, kun numeroita on yhdestä 127:ään ja emme kyllä muistaisi, missä jokainen numero tällöin olisi. Monesti pyysimme oppilaita miettimään jotain numeroa yhden ja 127 välillä ja luimme jälleen heidän ajatukset käyttäen samankaltaisia numerolaatikoita kuin aiemmin, mutta joissa nyt oli numerot 1-127.

Pyysimme seuraavaksi heitä kiinnittämään huomiota laatikon ensimmäisiin numeroihin, kun teimme tempun vielä kerran uudelleen. Tällöin luokasta löytyi monesti muutama, joka oivalsi, miten tempu tehdään. Annoimme lopuksi vielä heille mahdollisuuden kokeilla taikatempun tekemistä toisilleen.

## 5.2 Möbiuksen nauha

Vuonna 1858 Möbiuksen nauhan keksivät toisistaan tietämättä matemaatikot August Ferdinand Möbius ja Johan Benedict Listing (Me tutkijat, 2011). Se on nauha, jolla on vain yksi puoli ja yksi reuna. Möbiuksen nauha -tehtävä aloitetaan ottamalla suorakulmion muotoinen paperiliuska ja teippaamalla alla olevassa kuvassa oranssilla viivalla väritetyt sivut yhteen siten, että muodostuu lieriö. Seuraavaksi piirretään ruksi leveys suunnassa suunnilleen paperin puoleenväliin. Piirretään viiva pitämällä tussi kiinni paperissa katkoviivan mukaisesti lieriön ympäri. Tehdään sama paperin toiselle puolelle. Huomataan, että paperilla on kaksi puolta. Leikataan paperi viivan kohdalta, jolloin saadaan kaksi

matalampaa lieriötä. Tämän osuuden teki monesti vain ohjaaja ja oppilaat pääsivät mukaan seuraavaan osuuteen.



Kuva 4 Möbiuksen nauha

Seuraavaksi otetaan uusi suorakulmainen paperi ja nyt teipataan jälleen oranssit sivut yhteen, mutta tällä kertaa siten, että paperi kierretään puoli kierrosta ennen paperin teippaamista. Näin saadaan niin kutsuttu Möbiuksen nauha. Tehdään tälle nauhalle sama kuin edelliselle, merkitään puoleen väliin ruksi ja lähdetään piirtämään paperia pitkin viivaa. Nyt tavoitteena on piirtää kynää nostamatta viiva, joka kiertää koko nauhan ympäri ja päättyy kohtaan, josta piirtäminen aloitettiin.

Tehtyään tämän oppilaat huomasivat, että nyt paperilla olikin vain yksi puoli. Seuraavaksi kokeillaan, mitä tapahtuu jos paperin leikkaa viivaa pitkin. Nyt nauhasta ei muodostu kahta erillistä nauhaa, vaan yksi pidempi nauha. Halutessaan oppilaat voivat vielä leikata nauhan uudelleen, jolloin he saavat kaksi nauhaa, jotka ovat kietoutuneet toisiinsa. Lopuksi ohjaaja kysyy oppilailta tietävätkö he, missä käytetään Möbiuksen nauhaa. Nauhaa käytetään muun muassa kassahihnoissa, jotta hihna kuluisi molemmilta puolilta tasaisesti ja myös vanhojen kirjoituskoneiden mustenauhoissa.

Ohjaaja voi Möbiuksen nauha tehtävässä kertoa oppilaille Möbiuksesta tarinamaisessa muodossa, jolloin historia auttaa lisäämään oppilaiden ymmärrystä asiasta ja myös lisäämään heidän mielenkiintoa aiheeseen. Aivan nuorimmat oppilaat eivät tajunneet Möbiuksen nauhan ideaa kovin hyvin, sillä heillä keskittyminen oli lähinnä viivan piirtämisessä ja paperin leikkaamisessa. Näille ryhmille, otimmekin Möbiuksen nauhan tilalla usein seuraavaksi esiteltävän meteoriitti tehtävän tai binääritaikatempun.

### 5.3 Meteoriitti iskeytyy maahan

Meteoriitti iskeytyy maahan –tehtävässä oppilaat havaitsivat todennäköisyyksien avulla maapallon maa-alueiden ja vesistöjen osuuksia maapallon kokonaispinta-alasta. Tehtävässä pohdittiin, putoaako meteoriitti meteoriitin osuessa maapalloon todennäköisemmin maahan vai veteen.

Tehtävässä oppilaille merkittiin tussilla etusormeen piste, joka esitti meteoriittia, joka oli iskeytyvässä maahan. Tarkoituksena oli heitellä ilmalla täytettyä muovista maapalloa (rantapallo) ja merkitä muistiin tukkimiehen kirjanpidolla osumat maahan ja veteen. Oppilaan saadessa maapallon kiinni, hän katsoi, oliko hänen etusormensa meteoriitti osunut maahan vai veteen ja ilmoitti siitä kirjanpitäjälle, joka kirjasi tuloksen ylös. Lopuksi kirjanpitäjä laski osumat ja kertoi saadun tuloksen. Tällä tavalla todennäköisyyksien avulla

pystyttiin melko tarkasti kertomaan, kuinka suuri osa maapallon pinta-alasta on maata ja kuinka suuri osa vettä ja myös pohtimaan, minne meteoriitti todennäköisimmin osuu.

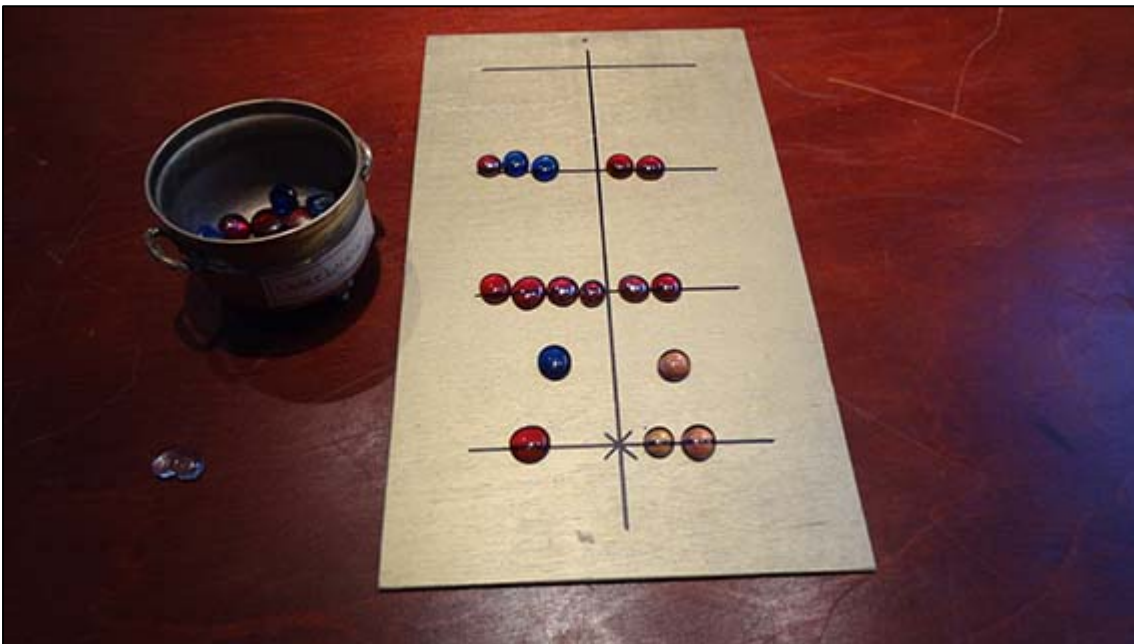
#### 5.4 Ajattele tuhatta

Tässä tehtävässä tarvitaan vain kynä, paperia ja noppa. Oppilaat piirtävät paperille 3 x 3 ruudukon. Ohjaaja heittää noppaa yhdeksän kertaa ja oppilaat sijoittavat nopan antamat silmäluvut ruudukkoon siten, että syntyvien lukujen summa olisi mahdollisimman lähellä tuhatta. Katsotaan kuka pääsee lähimmäs lukua tuhat. Peli on hyvin yksinkertainen ja nuoremmat oppilaat pitivät siitä todella paljon ja halusivat pelata sitä useampia kierroksia. Oppilaat pyysivät myös saada kokeilla tehtävää vähennyslaskulla siten, että laskutoimituksesta tulisi luku, joka olisi mahdollisimman lähellä esimerkiksi lukua 200.

#### 5.5 Laske laudalla

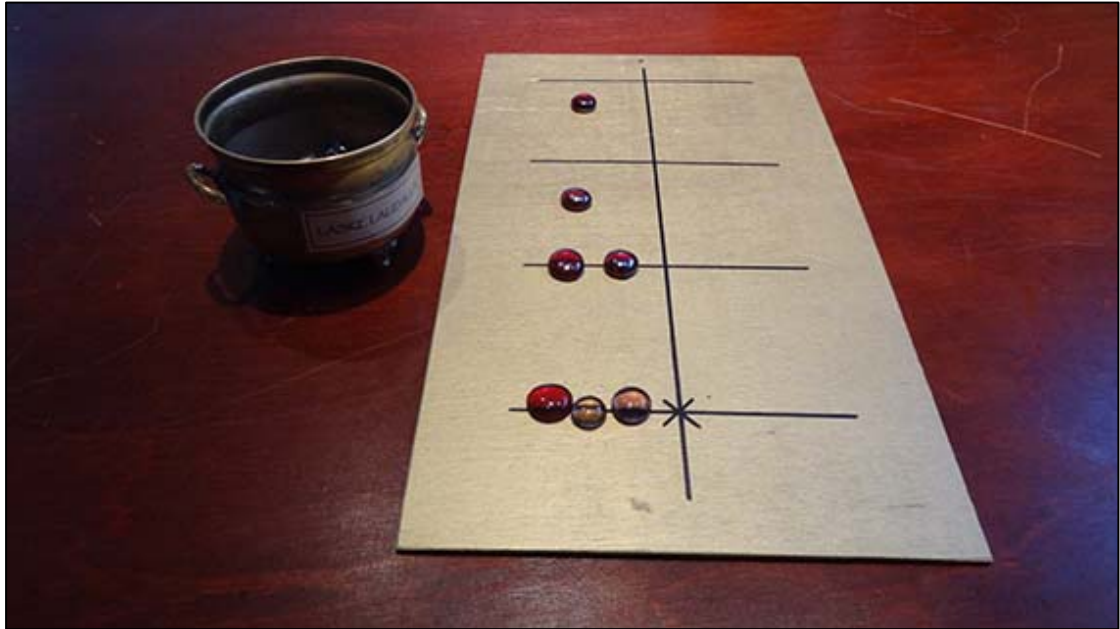
Laske laudalla on tehtävä, jossa ohjaajasta riippuen oli jonkinlainen taustatarina. Taustatarinaa hyödynsimme hyvin monessa tehtävässä, sillä sen avulla saimme tehtävään mielenkiintoa ja tehtävä oli helpompi ymmärtää. Taustatarina auttoi myös liittämään historian tapahtumia tehtävään. Laske laudalla tehtävän taustatarinana saattoi toimia esimerkiksi kertomus siitä, miten historiassa kerättiin veroja ja kuinka veronkerääjät käyttivät laskulautaa apuna verojen keräämisessä.

Tehtävässä tutustuttiin siis laskulautaan ja siihen, miten sillä voidaan laskea. Ohjaaja saattoi myös pyytää oppilaita miettimään, minkä värikuulan veronmaksaja saattaisi poistaa, jotta verot pienenisivät mahdollisimman paljon, mutta kuitenkin sillä tavalla, että veronkerääjän olisi mahdollisimman vaikea huomata värikuulan puuttumista.



Kuva 5 Laskulauta

Kuvan laudassa alimmalla viivalla ovat ykköset, viivan yläpuolella, alimman ja toiseksi alimman viivan välissä ovat viitokset, toiseksi alimmalla viivalla ovat kymmenluvut ja niin edelleen viisikymmenluvut, sataluvut, viisisataaluvut ja ylimmällä viivalla tuhatluvut. Laudan avulla voidaan laskea yhteen ja vähennyslaskuja kätevästi. Esimerkiksi kuvissa on esitetty yhteenlasku  $346 + 227 = 573$ .



Kuva 6 Yhteenlaskua laskulaudalla

### 5.6 Talonpojan ongelma

Talonpojan ongelmassa oppilaat pääsivät mukaan draamaan. Ongelma sopi paremmin nuoremmille oppilaille kuin aivan vanhemmille. Luokasta valittiin neljä vapaaehtoista, joista yksi oli talonpoika, toinen lamma, kolmas kaalinpää ja neljäs oli susi. Vapaaehtoiset saivat rooleihin sopivat asusteet: talonpojalle annettiin lippalakki, lampaalle lammaspähine, sudelle susipähine ja kaalinpäälle kaalinpää pähine.



Kuva 7 Rooliasusteet

Kun vapaaehtoiset saatiin valittua, kerrottiin oppilaille, kuinka talonpojalla oli ostanut torilta lampaan ja kaalinpään ja matkalla talonpoikaa vastaan tuli myös susi, jonka talonpoika pyydysti ja päätti viedä kaupunkiin eläintarhaan. Seuraavaksi oppilaille esitettiin talonpojan ongelma: miten talonpoika pääsee joen yli takaisin kaupunkiin, kun veneeseen mahtuu vain kaksi kerrallaan ja vain talonpoika osaa soutaa. Toisaalta, jos kaalinpää jää kahden lampaan kanssa, niin lammas syö kaalinpään ja jos susi jää lampaan kanssa kahden, niin susi syö lampaan. Kysymys on siis, miten talonpoika saa kuljetettua kaikki kolme kotiin joen yli niin, että kukaan ei tule syödyksi.

Oppilaat ratkaisivat ongelmaa yhdessä ohjaajien kanssa ja kokeilivat eri vaihtoehtoja, kunnes keksivät oikean ratkaisun ja talonpoika pääsi kotiin yhdessä suden, lampaan ja kaalinpään kanssa. Monesti oppilaat olivat hyvin innoissaan ja halusivat kertoa ja kokeilla omia ratkaisuja innokkaasti. Myös näytteleminen saattoi karata käsistä, jos ohjaajat eivät ohjanneet oppilaiden innostusta ongelman ratkaisemiseen ja ratkaisuun.

Ratkaisu ongelmaan on seuraava:

- talonpoika vie lampaan joen yli
- talonpoika hakee kaalinpään/suden ja vie lampaan takaisin joen toiselle puolelle
- talonpoika ottaa suden/kaalinpään mukaansa ja jättää suden kaalinpään kanssa
- lopuksi talonpoika hakee lampaan joen toiselle puolelle.

Talonpojan ongelma toimi erittäin hyvin kolmas- ja neljäsluokkalaisille. Myös nuoremmille oppilaille ongelma toimi, mutta ohjaajilta vaadittiin enemmän apua ja ohjausta ongelman ratkaisuun. Vanhemmille oppilaille talonpojan ongelma oli melko helppo, ja osa oli kuullut sen jo aiemmin. Vanhemmille oppilaille teimmekin seuraavaksi esittelemäni pulman nimeltään painavin nalle.

## 5.7 Painavin nalle

Painavin nalle pulmassa on tarkoitus löytää 24 nallen joukosta yksi nalle, joka on eri painoinen kuin muut nallet. Nalleja on kolme eri väriä ja jokaista väriä on kahdeksan nallea. Väreillä ei ole ratkaisun kannalta merkitystä, mutta se ohjaa oikean ratkaisun löytymiseen. Pulmassa on siis tarkoitus tietää, mikä nalleista on kaikkein painavin käyttämällä alla olevan kuvan mukaista tasapainovaakaa. Tavoitteena on päästä tulokseen kolmella punnituksella.



Kuva 8 Nallet ja vaaka

Pulman ympärille voi muodostaa taustatarinan. Esimerkiksi kyseessä voi olla nalleperhe, jonka yksi osallinen syö puurosta aina suuremman osuuden kuin muut. Muut nallet ovat saaneet tarpeekseen tästä ja haluavat tietää, kuka nalleista on syyllinen. Kukaan ei kuitenkaan suostu tunnustamaan ja niinpä he ryhtyvät punnitsemaan kuka nalleista on syyllinen. Pulmana on kuitenkin, että punnituskertoja on vain kolme. Kysymys kuuluukin, miten nallet pitäisi punnita, kun punnituksia on vain kolme ja jotta saataisiin tietää, kuka nalleista syö puuroa enemmän kuin muut nallet.

Oppilaat monesti ehdottivat monia eri tapoja punnita nallet ja lopulta pääsivät neljään punnitukseen ratkaisussaan. Lopuksi ohjaaja kertoi oppilaille oikean ratkaisun, jos siihen ei vielä päästy. Ohjaaja saattoi myös paljastaa idean, mitä pulmassa hyödynnettiin punnituksen jokaisessa vaiheessa, jos kaikki oppilaat eivät vielä oivaltaneet sitä.

Ratkaisu nallepulmaan on seuraava:

- Jaa nallet kolmeen ryhmään niin, että jokaisessa on kahdeksan nallea, punnitse niistä kaksi ryhmää. Jos vaaka on tasapainossa, niin painavin nalle on ryhmässä, joka ei ollut punnituksessa, muuten nalle on siinä ryhmässä, joka on painavampi.

- Hylätään ne nallet, joiden joukossa painavin nalle ei ollut ja jaetaan jälleen kahdeksan nallea kolmeen osaan siten, että kahteen tulee kolme nallea ja yhteen kaksi nallea.
- Punnitaan nyt kolmen nallen ryhmät. Jos vaaka on tasapainossa, painavin nalle on toinen niistä nalleista, joita ei punnittu, jolloin jäljelle jääneistä nalleista saadaan painavin selville punnitsemalla kaksi nallea.
- Jos kuitenkin vaaka ei ollut tasapainossa, niin tällöin painavin nalle on siinä kolmen nallen joukossa, joka oli painavin. Tällöin otetaan kolmen nallen ryhmä ja jaetaan se kolmeen osaan. Punnitaan kaksi nallea. Jos vaaka on tasapainossa, niin painavin nalle on se, jota ei punnittu, muuten painavin nalle on vaa'an mukainen nalle.

Ratkaisu perustuu siis siihen, että oppilaat ymmärtävät jakaa nallet aina kolmeen joukkoon, eikä kahteen, mikä on monilla ensimmäisenä mielessä. Painavin nalle pulma toimi paremmin vanhempien oppilaiden kanssa kuin aivan nuorimmaisten. Ongelma oli yleensä hyvä viidesluokkalaisille ja sitä vanhemmille oppilaille.

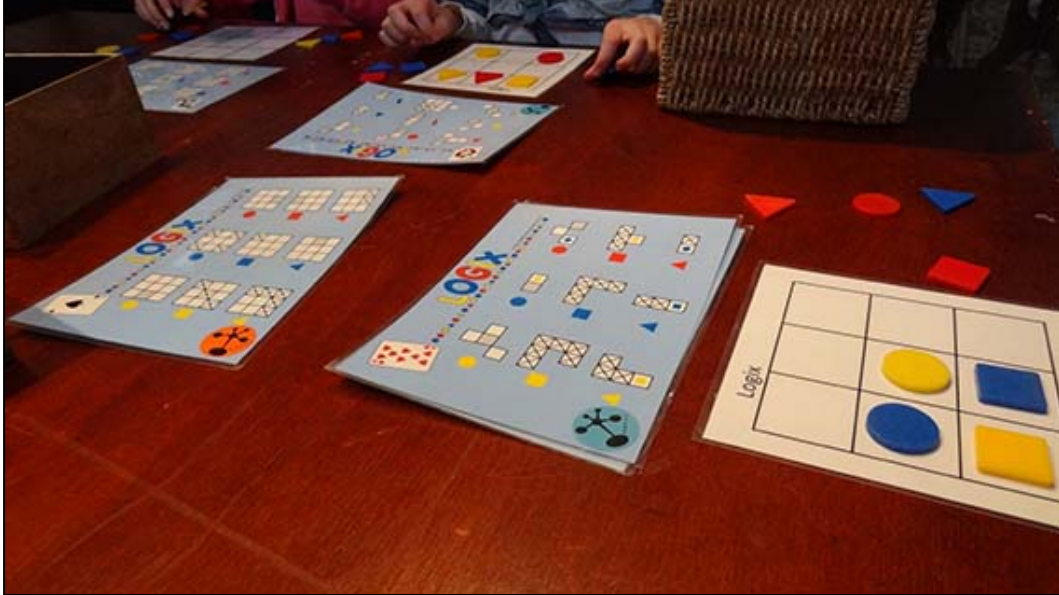
## **6 Teltan muut pelit ja pulmat**

Alun johdannon ja yhteisen osuuden jälkeen oppilaat saivat tutkia telttaa itsenäisesti. Teltassa oli paljon erilaisia pelejä, pulmia ja tehtäviä, joita tehdä ja miettiä yksin tai kaverin kanssa. Teltan tehtävät ja pelit voidaan ryhmitellä kolmeen eri osa-alueeseen. Tämä osa-alueisiin jako näkyi myös tehtävien asettelussa teltassa. Yksi osio piti sisällään erilaisia pulmapähkinöitä, toinen erilaisia pelejä ja kolmas askartelua vaativia tehtäviä. Telttaan oli siis koottu samankaltaiset tehtävät esimerkiksi samalle seinustalle. Tämä jaottelu toi järjestystä telttaan ja helpotti ohjaajien ja oppilaiden työskentelyä teltassa. Seuraavaksi kerron jokaisen osa-alueen tehtävistä tarkemmin.



## 6.1 Pulmapähkinät

Pulmapähkinät pitivät sisällään monia tunnettujakin tehtäviä kuten, kuinka saada muodostettua pyramidi, tähti, lautta, neliö, H- tai T-kirjain annetuista paloista. Nämä tehtävät kulkivat nimekkeellä aivo jumppaa. Pulmatehtävät kategoriaan liitin myös seuraavat pulmat: Hanoiin torin, punaiset ja siniset kuulat, Logix (kuvassa), tulitikku pulmat, Babylonin kuutio, poliisin järjestämä ryhmätunnistus, maanviljelijä ja hänen satonsa sekä Brysselin kuutiot.



Kuva 9 Logix

### 6.1.1 Hanoiin torni

Kuvan mukaisen rakennelman torni tulee siirtää toiseen tankoon kolmatta tankoa apuna käyttäen. Vain yhtä levyä saa siirtää kerrallaan ja suurempi levy ei koskaan saa olla pienemmän päällä. Peli pyritään ratkaisemaan mahdollisimman vähillä siirroilla.



Kuva 10 Hanoiin torni

Tarun mukaan intialaisessa Benaresin kaupungissa on Hanoi torni, joka koostuu 64 kultaisesta lasilevystä. Sanotaan, että Jumala asetti kultalevyt paikalleen luomisen aikaan. Kun temppelin papit saavat siirrettyä kultalevyt, koittaa maailmanloppu. Tämä ei ole ihme, koska työhön tarvitaan noin 18 miljardin miljardia ( $10^{18}$ ) siirtoa. Hanoi tornissa tarvittavien siirtojen vähimmäismäärän voi laskea kaavasta  $2^n - 1$ . (SuperKids Educational Resources, 1999-2012)

Näyttelyn Hanoi tornissa oli seitsemän kappaletta levyjä. Ohjeistimme monesti oppilaita kokeilemaan ratkaisua aluksi esimerkiksi viiden tai neljän levyn avulla, jolloin siirtoja oli enää 31 tai 15 kappaletta 127 sijaan.

### ***6.1.2 Punaiset ja siniset kuulat***

Tarkoituksena on saada punaiset kuulat sinisten kuulien paikalle ja päinvastoin. Kuulia saa siirtää vain yhden askeleen viereiselle tikulle tai hyppäämällä toisenvärisen kuulan yli seuraavalle tikulle. Kuulia ei saa siirtää taaksepäin, eikä samanväristen kuulien yli saa hypätä.



Kuva 11 Siniset ja punaiset kuulat

### **6.1.3 Brysselin kuutiot**

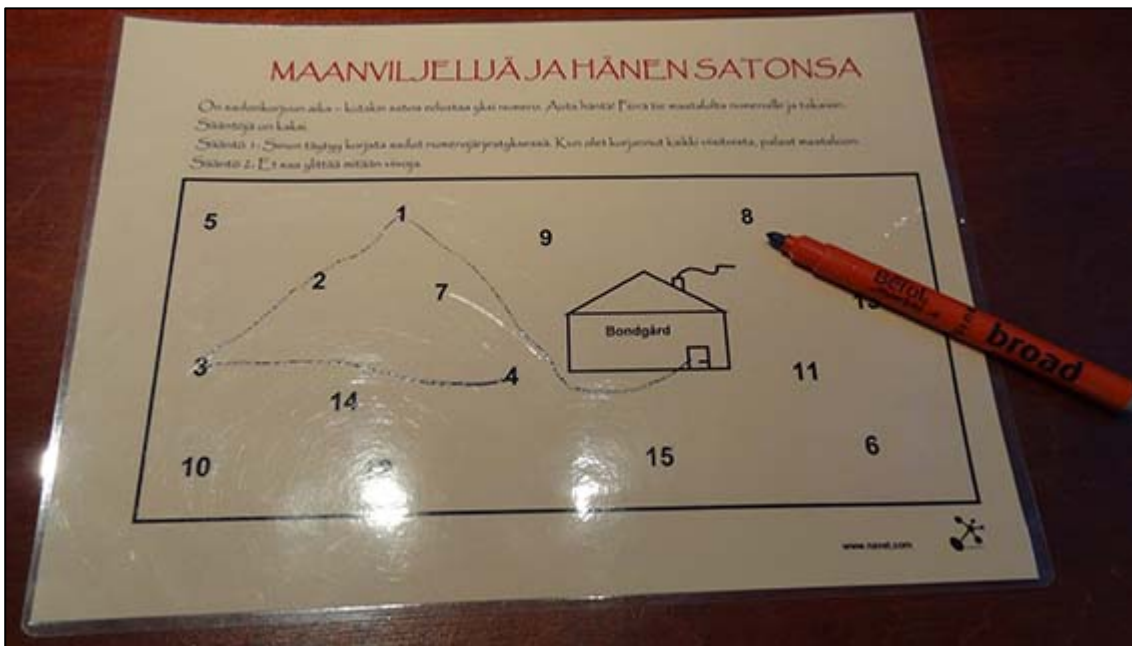
Brysselin kuutiot on pähkinä, jossa oli tarkoitus rakentaa kuutio kuudesta palapelin palasta. Paloista saattoi myös tehdä palapelin. Osa oppilaista piti kuutioista todella paljon, erityisesti tytöt pitivät Brysselin kuutioista. Joskus oppilas saattoi tehdä kuutioita suurimman osan ajasta.



Kuva 12 Brysselin kuutiot

### 6.1.4 Maanviljelijä ja hänen satonsa

Maanviljelijä ja hänen satonsa on pulmatehtävä, jossa oppilaan tuli piirtää reitti lähtien maatilalta, kulki numeroiden kautta numerjärjestyksessä ja tullen maatilalle takaisin. Maanviljelijä ei kuitenkaan saanut mennä siten, että piirretty viiva menisi ristiin aiemmin piirretyn viivan kanssa. Tehtävä oli laminoidulla paperilla kuvan mukaisesti ja oppilas piirsi siihen tussilla reittiä. Tussi lähti pois vedellä ja paperilla. Tehtäviä oli kahta vaikeusastetta ja tehtävä oli etenkin nuorempien suosiossa. Samantapainen tehtävä oli myös tehtävä, jossa oppilaan tuli yhdistää numeroparit viivalla. Tässäkään tapauksessa viivat eivät saaneet ristetä toisen viivan kanssa.



Kuva 13 Maanviljelijä ja hänen satonsa

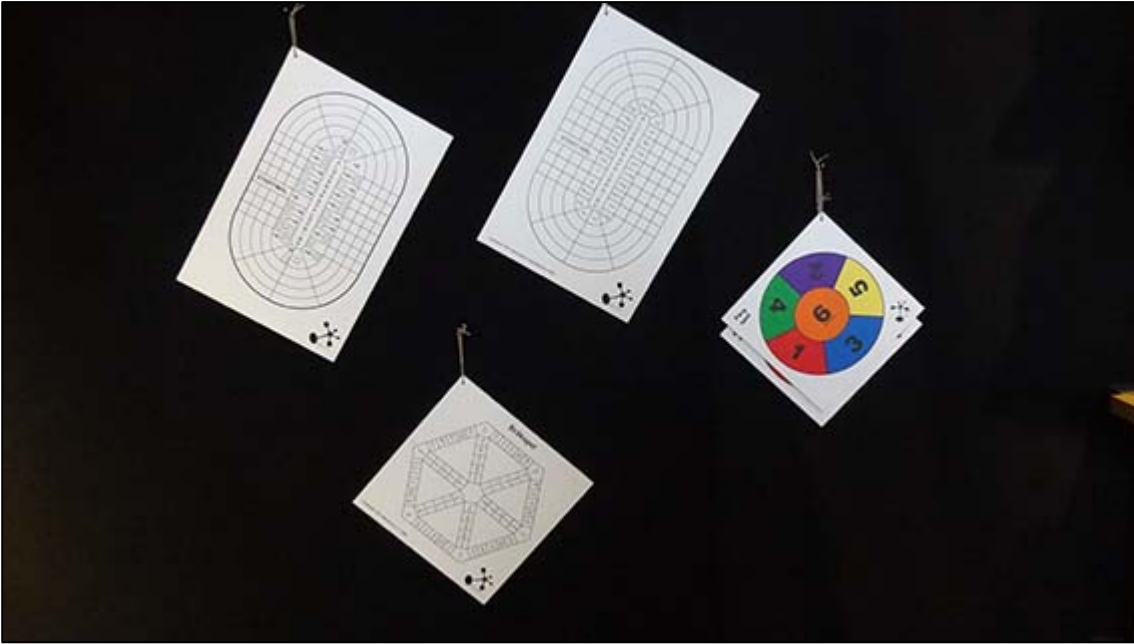
## 6.2 Erilaisia pelejä

Tähän osioon olen koonnut eri pelejä, joita teltassa oli. Näitä ovat muun muassa: neljän suora, kolmiulotteinen neljän suora, Rupikin kuutio, shakki, Trick-Track, Ubongo, puukolmio, tikut pöydällä, Nim-peli, Tac Tix, Kalaha (kuvassa), Ruuhka-aika (Rush hour), Backgammon, Pentago, Quarto sekä kolikon heitto ja vaihtaisitko vai et? pelit. Kolikon heitto ja vaihtaisitko vai et? (nk. Monty Hall tehtävä) peleissä tutustuttiin todennäköisyyteen.



Kuva 14 Kalaha

Teltassa oli myös pelejä, joissa oppilaat harjoittelivat pelilaudan ja nopan avulla laskutoimituksia. Näitä olivat algebrakilpailu, murtolukupeli ja väripeli nuoremmille (kuvassa). Teltasta löytyi myös oppimisavaimet, joiden avulla oppilas saattoi harjoitella eri laskutoimituksia. Nämä laskutoimituksia harjoittavat pelit eivät olleet suosittuja oppilaiden keskuudessa.



Kuva 15 Pelilaudat

### 6.2.1. 3-ulotteinen Neljän suora

Tavallisen neljän suoran lisäksi oppilaat saattoivat pelata 3-ulotteista neljän suoraa, jossa kahdella pelaajista on eriväriset kuulat. Se, joka saa ensimmäisenä muodostettua neljän suoran vaakasuoraan, pystysuoraan tai poikittain voittaa. 3-ulotteinen neljän suora löytyi myös suurena lattialla pelattavana versiona.



Kuva 16 3-ulotteinen neljän suora

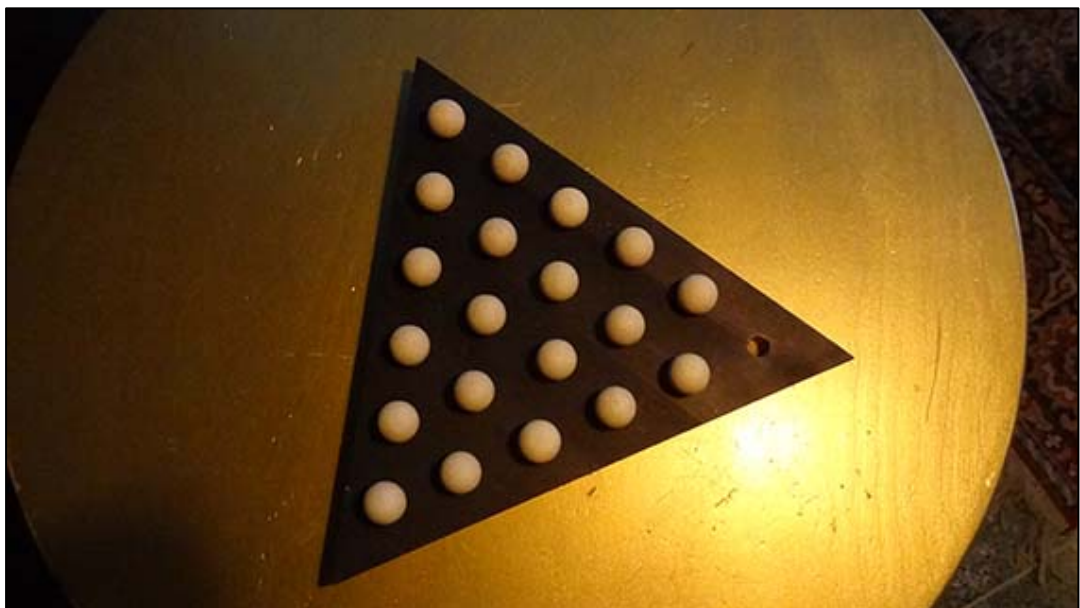
Myös tavallinen neljän suora oli todella suosittu. Varsinkin nuoremmat oppilaat aloittivat sillä pelillä. Tämä saattoi johtua siitä, että peli oli tuttu ja mukava.



Kuva 17 Neljän suora

### 6.2.2 Puukolmio

Kuvan mukaisen puukolmio pelin ideana on saada vain yksi nappula jäämään pelin loppuksi pelilaudalle. Tehtävänä on hypätä yhdellä valitsemallasi tikulla toisen puutikun yli ja tämän jälkeen poistaa ylihypyttävä tikku. Vain yhden tikun yli saa hypätä kerralla ja hyppäsuunnalla ei ole väliä, kunhan hyppää aina suoraan. Peliä saattoi pelata yksinpelinä tai kavereiden kanssa. Monissa peleissä oppilailla oli hyvin luovia ratkaisuja ja omia ideoita, miten peliä voisi pelata. Eräskin oppilas yhdisti kaksi puukolmiota ja pelasi näin.



Kuva 18 Puukolmio

### 6.2.3 Tikut pöydällä

Tikut pöydällä peli oli sijoitettu hyvin näyttävälle paikalle teltassa ja monet oppilaat halusivatkin kokeilla peliä. Pelistä oli myös pienempi versio. Pelissä tarvitaan kaksi pelaajaa. Peli aloitetaan uloimmaisella tikulla ja tikkuja poistetaan vuorotellen laudalta. Pelaaja voi poistaa joka vuorolla yhden, kaksi tai kolme tikkuja kerralla. Tikut täytyy poistaa peräkkäisessä järjestyksessä. Viimeisen (mustan) tikun poistava pelaaja on hävinnyt pelin. Pelissä on kaksi pelaajaa, pelaaja itse sekä hänen vastustajansa, jonka hän on haastanut peliin.



Kuva 19 Tikut pöydällä

Pelissä on 20 tikkuja ja viimeinen musta tikku. Yhteensä tikkuja on siis 21 kappaletta. Pelissä on taktiikka, jolla pelin voi voittaa aina, jos pelin aloittaja on vastustaja. Pelin voi myös voittaa, jos itse aloittaa, mutta vain, jos vastustaja ei tiedä taktiikka, jolla peli voitetaan tai, jos hän tekee virheen.

Monesti joku ohjaajista saattoi tulla haastetuksi peliin tai itse mahdollisesti haastoi jonkun oppilaan pelaamaan häntä vastaan. Ohjaaja saattoi myös kertoa oppilaalle, miten pelin voi voittaa antaen kuitenkin oppilaan aluksi itse pohtia ja miettiä, miten pelin voisi voittaa. Monesti oppilaat pääsivät jo hyvin pitkälle ajattelussaan ja keksivät, mihin voittajataktiikan on perustuttava.



Ohjaajien ei myöskään tarvinnut kertoa kuin yhdelle oppilaalle voittajataktiikasta, kun sana levisi muille oppilaille ja muut oppilaat tulivat haastetuksi. Oppilaat monesti myös haastoivat oman opettajan, kun heillä oli tiedossa taktiikka, jolla oli mahdollisuus voittaa. Peli oli hyvin hauska ja oppilaat nauttivat toisten haastamisesta.

Kun oppilaat olivat ymmärtäneet voittajataktiikan idean, saattoivat ohjaajat haastaa oppilaita pohtimaan, miten peli muuttuisi, jos tikkuja olisikin esimerkiksi alussa 19 tikkuja viimeisen mustan tikun lisäksi. Oppilaat kokeilivat ja tutkivat uutta tilannetta ja useimmiten keksivätkin, miten nyt tulisi pelata, jotta pelin voittaisi.

Pelin voittotaktiikka liittyy jaollisuuteen. Pelin 20 tikkuja muodostuu viidestä neljän tikun ryhmästä. Tätä ideaa käyttäen oppilas voi voittaa. Aluksi jos vastustaja poistaa yhden tikun laudalta, niin pelaaja nostaa kolme tikkuja, jos vastustaja nostaa kaksi tikkuja, niin pelaaja nostaa kaksi tikkuja ja niin edelleen. Nostojen summa on siis aina neljä. Tämä toimii, jos oppilas ei itse joudu aloittamaan. Jos oppilas joutuu kuitenkin aloittamaan, niin täytyy hänen yrittää kääntää pelin tilanne itselle edulliseksi siten, että tilanne on samanlainen kuin se olisi, jos hän ei olisi aloittanut. Esimerkiksi, jos pelaaja nostaa aluksi yhden tikun ja vastustaja nostaa yhden tai kaksi tikkuja, niin voi pelaaja kääntää tilanteen itselleen eduksi nostamalla laudalta kaksi tikkuja tai yhden tikun. Tällöin tilanne on sama kuin, jos pelaaja ei olisi aloittanut peliä.

### **6.2.4 Shakki**

Shakin peluupaikasta oli kuvan mukaisesti tehty erittäin mielenkiintoinen ja houkutteleva ja monet oppilaat varmasti halusivatkin pelata shakkia, ei ainoastaan sen tähden, että se on hyvä peli, vaan myös pelipaikan houkuttelevuuden tähden. Jokaisesta luokasta tuntui löytyvän useitakin oppilaita, jotka osasivat ja pitivät shakin pelaamisesta todella paljon. Muutamia kertoja osa oppilaista pelasi koko näyttelyn ajan vain shakkia.



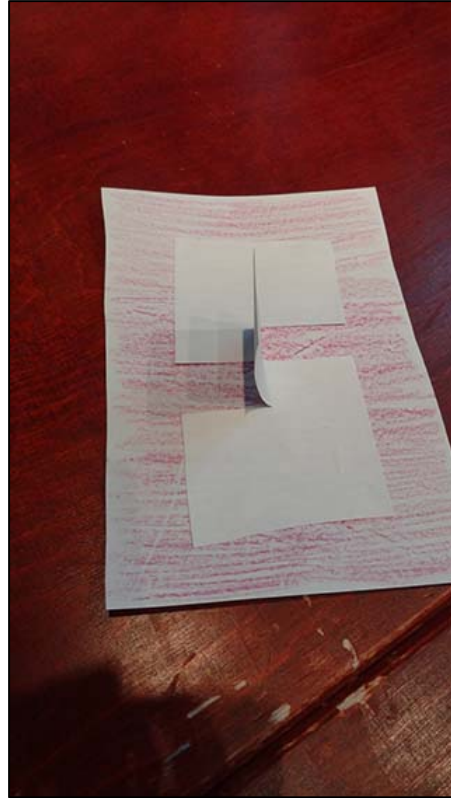
Kuva 20 Shakki

### **6.3 Askartelutehtäviä**

Näyttelyssä oli muutamia askartelua vaativia tehtäviä. Askartelutehtävät innostivat eniten nuorempia oppilaita. Askartelutehtäviä olivat seuraavat tehtävät: mahdoton leikkaustehtävä, taidetta kahdessa sekunnissa, Naum Gabo- ja geolaudat, tesselaatio, Platonin kappaleet, arkkitehti ja Escher-taideteos.

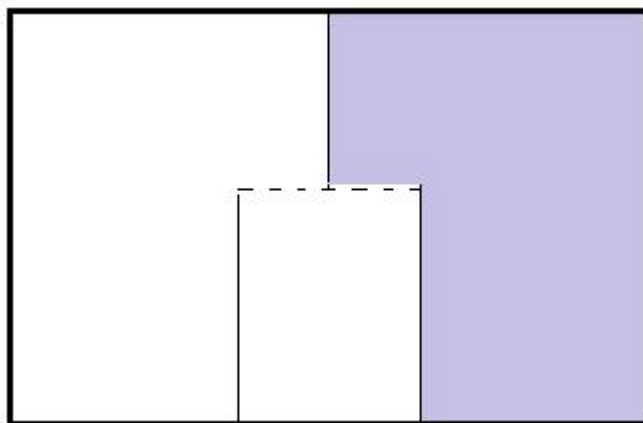
### 6.3.1 Mahdoton leikkaustehtävä

Mahdoton leikkaustehtävä on pulma, jossa paperinpalasta tulee askarrella kuvan mukainen kuvio. Tehtävänä on saada kolmella leikkauksella samanlainen kuvio ilman, että apuna käyttää liimaa tai teippiä. Paperia saa ainoastaan leikata ja taitella. Mitään ei saa kuitenkaan leikata paperista pois. Tehtävä oli melko haastava ja monesti annoimme sen opettajien ratkaistavaksi. Myös vanhemmat oppilaat tykkäsivät kokeilla ratkaista pulmaa.



Kuva 21 Leikkaustehtävä

Ratkaisu mahdottomaan leikkaustehtävään on esitetty kuvassa. Leikkaamalla paperin kolmesta kohtaa ohuita mustia viivoja pitkin ja sen jälkeen kääntämällä paperin siten, että violetti osuus jää alapuolelle piiloon saadaan paperista annetun kuvan mukainen. Kuvassa oleva poikkiviiva kuvaa kohtaa, johon tulee taitos.



Kuva 22 Leikkaustehtävän ratkaisu

### 6.3.2 Platonin kappaleet

Platonin kappale on säännöllinen monitahokas, jonka tahkot ovat yhteneviä keskenään ja jonka jokaisesta kärjestä lähtee yhtä monta särmää. Platonin kappaleita on viisi erilaista: tetraedri (pyramidi), kuutio, oktaedri, ikosaedri ja dodekaedri. Platon ihasteli näitä kappaleita niin paljon, että ajatteli niiden olleen luomisen perusta. Hän yhdisti ne alkuaineisiin: maahan, ilmaan, tuleen ja veteen siten, että tulta vastasi tetraedri, ilmaa oktaedri, vettä ikosaedri ja maata kuutio. Dodekaedri vastasi maailmankaikkeutta. (Math Pages)



Kuva 23 Platonin kappaleita

Platonin kappaleista oli paperille tulostettuja pohjia, joiden avulla oppilaat tekivät haluamansa kappaleen tai kappaleet. Nuoremmat oppilaat innostuivat enemmän Platonin kappaleista kuin vanhemmat oppilaat ja erityisesti tyttöoppilaat. Yleisesti askartelutehtävät olivat nuoremmille oppilaille enemmän mieleen kuin vanhemmille oppilaille.

## Lähteet

- BookRags. 2005-2006. [WWW]. [viitattu 15.6.2013]. Saatavissa: <http://www.bookrags.com/research/philista-scit-0112/>.
- MathPages. Platonic Solids and Plato's Theory of Everything. [WWW]. [viitattu 14.6.2013]. Saatavissa: <http://www.mathpages.com/home/kmath096/kmath096.htm>.
- Me tutkijat. Aleksi. 7.4.2011. Möbiuksen nauha. [verkkolehti]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: [http://www.peda.net/verkkolehti/siilinjarvi/siilinlahden\\_koulut/me\\_tutkijat?m=content&a\\_id=33](http://www.peda.net/verkkolehti/siilinjarvi/siilinlahden_koulut/me_tutkijat?m=content&a_id=33).
- NAVET science center. Matematik – Matematikpalatset. 2010. [WWW]. [viitattu 25.5.2013]. Saatavissa: <http://www.navet.com/sida.aspx?id=1092>.
- O'Connor, J.J., Robertson, E.F. 12/1996. Sofia Vasilyevna Kovalevskaya. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. [verkkoartikkeli]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kovalevskaya.html>.
- O'Connor, J.J., Robertson, E.F. 4/1999a. Hypatia of Alexandria. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. [verkkoartikkeli]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hypatia.html>.
- O'Connor, J.J., Robertson, E.F. 7/1999b. Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. [verkkoartikkeli]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi.html>.
- O'Connor, J.J., Robertson, E.F. 1999c. Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. [WWW]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Al-Khwarizmi.html>.
- O'Connor, J.J., Robertson, E.F. 11/2000a. A history of Zero. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. [verkkoartikkeli]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Zero.html#s31>.
- O'Connor, J.J., Robertson, E.F. 11/2000b. Brahmagupta. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. [verkkoartikkeli]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html>.
- SuperKids Educational Resources. 1999-2012. [WWW]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www.superkids.com/aweb/tools/logic/towers/>.
- The woman Astronomer. 1.1.2008. Hypatia of Alexandria: A Woman Before Her Time. [verkkoartikkeli]. [viitattu 13.6.2013]. Saatavissa: <http://www.womanastronomer.com/hypatia.htm>.
- Vapriikki. Bagdad – matematiikkaa täältä ikuisuuteen. 2013. [WWW]. [viitattu 21.5.2013]. Saatavissa: <http://vapriikki.fi/bagdad/>.

